# Provas de Matemática Básica I

## Período 2001.1

**Sérgio de Albuquerque Souza**

10 de janeiro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

**CCEN - Departamento de Matemática**

http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *29/Mai/2001* Turno: *Manhã*

Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *02* Matrícula:

**Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula ⇑⇑⇑**

**1ª Questão (2,0)** Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{alfabeto\}$

**a)** A relação $\mathcal{R} = \{(1, m), (2, a), (3, t), (4, e), (5, m), (\mathcal{K}, a), (7, t)(8, i), (9, c), (0, a)\}$ é uma função? (Justifique). Estabeleça o domínio e a imagem desta relação;

**b)** Encontre uma relação $\mathcal{L}$ entre os conjuntos $B$ e $A$ com e $im(\mathcal{L}) = \{pares\}$ e $dom(\mathcal{L}) = \{\textit{letras do seu primeiro nome}\}$. É possível que $\mathcal{L}$ seja uma função?

**2ª Questão (2,0)** Dadas as funções $a(x) = x + 1$ e $b(x) = \dfrac{(\mathcal{K} + 1)}{x} + (\mathcal{K} + 1)$, resolva as seguintes equações:

**a)** $a(x) = b(x)$

**b)** $a[b(x)] = -2x - 1$

**3ª Questão (3,0)** Em uma fábrica de componentes eletrônicos, suponha que o custo fixo de produção de um determinado componente seja de U\$ 5.400,00 e o custo variável seja de $\dfrac{2\mathcal{K} + 5}{2}$ dólares por unidade.

**a)** Qual o custo médio para a produção de 3.000 componentes? Determine a função custo médio $C_m(x)$.

**b)** Se cada componente for vendido ao preço de $(10+\mathcal{K})$ dólares. Qual é o ponto de equilíbrio?

**c)** Quantos componentes devem ser vendidos para que a fábrica obtenha um lucro igual à U\$ 5.400,00?

**4ª Questão (3,0)** Uma fábrica de peças para automóveis, tem uma demanda dada pela função $d(x) = 14(15 - \mathcal{K}) - x$, onde $x$ é o número de **dezenas** de peças.

**a)** Qual é a função receita $R(x)$ (em U\$) desta fábrica?

**b)** Qual é a receita desta fábrica, para uma demanda de 300, 450, 500, 650 e 800 peças?

**c)** Qual será a quantidade de peças a ser produzidas pela fábrica, para que a receita seja de $(10.400 - 1.120\mathcal{K})$ dólares?

*Boa Sorte*

# UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

**CCEN - Departamento de Matemática**

http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *29/Mai/2001* Turno: *Noite*

Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *05* Matrícula:

**Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula ⇑⇑⇑**

**1ª Questão (2,0)** Dados os conjuntos $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $B=\{alfabeto\}$

**a)** A relação $\mathcal{R}=\{(1,m),(2,a),(\mathcal{K},t),(4,e),(5,m),(6,a),(7,t)(8,i),(9,c),(0,a)\}$ é uma função? (Justifique). Estabeleça o domínio e a imagem desta relação;

**b)** Encontre uma relação $\mathcal{S}$ entre os conjuntos $A$ e $B$ com $dom(\mathcal{S})=\{pares\}$ e $im(\mathcal{S})=\{\textit{letras do seu primeiro nome}\}$. É possível que $\mathcal{S}$ seja uma função?

**2ª Questão (2,0)** Dadas as funções $a(x)=x+1$ e $b(x)=\dfrac{(\mathcal{K}+2)}{x}+(\mathcal{K}+2)$, resolva as seguintes equações:

**a)** $a(x)=b(x)$

**b)** $b[a(x)]=\mathcal{K}+1$

**3ª Questão (3,0)** Em uma fábrica de componentes eletrônicos, suponha que o custo fixo de produção de um determinado componente seja de U$ 5.400,00 e o custo variável seja de $\dfrac{2\mathcal{K}+3}{2}$ dólares por unidade.

**a)** Qual o custo médio para a produção de 3.000 componentes? Determine a função custo médio $C_m(x)$.

**b)** Se cada componente for vendido ao preço de $(4+\mathcal{K})$ dólares. Qual é o ponto de equilíbrio?

**c)** Quantos componentes devem ser vendidos para que a fábrica obtenha um lucro igual à U$ 5.400,00?

**4ª Questão (3,0)** Uma fábrica de peças para automóveis, tem uma demanda dada pela função $d(x)=20(\mathcal{K}+5)-x$, onde $x$ é o número de **dezenas** de peças.

**a)** Qual é a função receita $R(x)$ (em U$) desta fábrica?

**b)** Qual é a receita desta fábrica, para uma demanda de 300, 450, 500, 650 e 800 peças?

**c)** Qual será a quantidade de peças a ser produzidas pela fábrica, para que a receita seja de $(1.800\mathcal{K}+900)$ dólares?

*Boa Sorte*

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
**CCEN - Departamento de Matemática**
http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Matemática Básica I (Pré-prova)

| | | |
|---|---|---|
| Prof.: *Sérgio* | Data: *20/Jun/2001* | Turno: *M+N* |
| Curso: | Nome: | |
| Período: *01.1* | Turma(s): | Matrícula: |

**1ª Questão** Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

**a)** A relação $\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3), (e, 1), (f, 5), (b, 2)\}$ é uma função? (Justifique). Estabeleça o domínio e a imagem desta relação;

**b)** Encontre uma relação $\mathcal{S}$ entre os conjuntos $A$ e $B$ com $dom(\mathcal{S}) = \{vogais\}$ e $im(\mathcal{S}) = \{pares\}$. É possível que $\mathcal{S}$ seja uma função? (Justifique)

**c)** Encontre uma relação $\mathcal{L}$ entre os conjuntos $B$ e $A$ com $dom(\mathcal{L}) = \{pares\}$ e $im(\mathcal{L}) = \{vogais\}$. É possível que $\mathcal{L}$ seja uma função? (Justifique)

**2ª Questão** Dadas as funções $a(x) = x - 1$, $b(x) = x^2 + 2x$ e $c(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, resolva as seguintes equações:

**a)** $b[a(x)] = 3$ — *R:* $x_1 = -2$ *e* $x_2 = 2$

**b)** $a[b(x)] = 2$ — *R:* $x_1 = -3$ *e* $x_2 = 1$

**c)** $a(x) = b(x) - 1$ — *R:* $x_1 = 0$ *e* $x_2 = -1$

**d)** $c(x) = a(x)$ — *R:* $x_1 = -1$ *e* $x_2 = 1$

**3ª Questão** Em uma fábrica de componentes eletrônicos, suponha que o custo fixo de produção de um determinado componente seja de U\$ 5.400,00 e o custo variável seja de U\$ 7,50 por unidade.

**a)** Qual é a função custo total $Ct(x)$ (custo fixo + custo variável)?

**b)** Qual é o custo total para a produção dos 3.000 componentes?
*R: U$ 27.900,00*

**c)** Qual o custo médio para a produção de 3.000 componentes? Determine a função custo médio $C_m(x)$? *R: U$ 9,30*

**d)** Se cada componente for vendido ao preço de U$ 12,00 por unidade. Qual é a receita da venda de 3.000 componentes? Determine a função receita $R(x)$? *R: U$ 36.000,00*

**e)** Qual é o ponto de equilíbrio, isto é, qual o valor para $x$ onde $Ct(x) = R(x)$? *R: 1.200 peças*

**f)** Qual o lucro da fábrica se for vendidos os 3.000 primeiros componentes? *R: U$ 8.100,00*

**g)** Qual é a função lucro total $L(x)$ (receita - custo total)?

**h)** Qual o lucro médio para a venda de 3.000 componentes? Determine a função lucro médio $L_m(x)$? *R: U2,70*

**4ª Questão** Uma fábrica de peças para automóveis, tem uma demanda dada pela função $d(x) = 110 - x$, onde $x$ é o número de centenas de peças.

**a)** Qual é a função receita (em U$) desta fábrica $R(x)$ (quantidade.demanda $= x.d(x)$)?

**b)** Qual é a receita desta fábrica, para uma produção de 3000, 4000, 5000, 6000 e 7000 peças? *R: 2.400, 2.800, 3.000, 3.000, 2.800*

**c)** Qual será a quantidade de peças a ser produzidas pela fábrica, para que a receita seja U$ 2.989,00 *R: 49 e 61 peças*

---

*Boa Sorte*

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
**CCEN - Departamento de Matemática**
http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *28/Jun/2001* Turno: *Manhã*
Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *02* Matrícula:

**1ª Questão (2,0)** Resolver as equações:

**a)** $\log_{\left(\frac{1}{x-\mathcal{K}+9}\right)}\left(\dfrac{1}{11-\mathcal{K}}\right)^2 = 2$ **b)** $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^2}{3^x} = 9^x\sqrt{3^{(2\mathcal{K}+1)}}$

**2ª Questão (2,0)** Considere $C(x) = -x^2 - 2x(\mathcal{K}-1) + 4\mathcal{K}$ como sendo a função *custo total* (em **milhões** de dólares) de uma determinada empresa, determine o custo fixo, o custo máximo (vértice) e trace o gráfico da função $C(x)$.

**3ª Questão (2,0)** Na função $L(x) = -(1/2)^{(x-6-K)} + 2^{(5-K)}$ *lucro total* de uma fábrica, determine o ponto de equilíbrio (em **centenas** de unidades) e esboce o gráfico de $L(x)$.

**4ª Questão (2,0)** Esboce o gráfico e determine para qual valor (em dólares) o *custo médio* $CM(x) = \dfrac{1}{x+2} + 10 - \mathcal{K}$ se aproxima, quando a produção aumenta.

**5ª Questão (2,0)** Se a função $R(x) = \log_{(\mathcal{K}+4)}(x+\mathcal{K}+4) - 2$ representa a função *receita* (em **milhares** de dólares) de uma determinada empresa, a partir de quantas unidades vendidas a empresa terá uma receita superior a U$ 1.000,00. Esboce o gráfico de $R(x)$.

**Observações:**

**a)** Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula;

**b)** Em todos os gráficos desta prova, encontrar caso existam, os pontos do gráfico que "cortam" os eixos $x$ e $y$.

*Boa Sorte*

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

**CCEN - Departamento de Matemática**

http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *28/Jun/2001* Turno: *Noite*

Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *05* Matrícula:

**1ª Questão (2,0)** Resolver as equações:

**a)** $\log_{(x-\mathcal{K}+9)}(11-\mathcal{K})^2 = 2$ **b)** $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2^x} = 4^x\sqrt{2^{(2\mathcal{K}-1)}}$

**2ª Questão (2,0)** Considere $C(x) = x^2 + 2(\mathcal{K}+1)x + (2\mathcal{K}+1)$ como sendo a função *custo total* (em **milhares** de dólares) de uma determinada empresa, determine o custo fixo, o custo mínimo (vértice) e trace o gráfico da função $C(x)$.

**3ª Questão (2,0)** Na função $L(x) = \log_{(\mathcal{K}+2)}(x+\mathcal{K}+2) - 2$ *lucro total* de uma fábrica, determine o ponto de equilíbrio (em **centenas** de unidades) e esboce o gráfico de $L(x)$.

**4ª Questão (2,0)** Esboce o gráfico e determine para qual valor (em dólares) o *custo médio* $CM(x) = \dfrac{1}{x+1} + \mathcal{K} + 2$ se aproxima, quando a produção aumenta.

**5ª Questão (2,0)** Se a função $R(x) = 2^{(x-\mathcal{K}-5)} - 4$ representa a função *receita* (em **milhões** de dólares) de uma determinada empresa, a partir de quantas unidades vendidas a empresa terá uma receita superior a U\$ 4.000.000,00. Esboce o gráfico de $R(x)$.

**Observações:**

**a)** Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula;

**b)** Em todos os gráficos desta prova, encontrar caso existam, os pontos do gráfico que "cortam"os eixos $x$ e $y$.

*Boa Sorte*

# UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

**CCEN - Departamento de Matemática**

http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Matemática Básica I (Pré-prova)

Prof.: *Sérgio* Data: *20/Jun/2001* Turno: *M+N*

Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma(s): Matrícula:

**1ª Questão** Completar os quadrados de:

**a)** $a(x) = x^2 + 4x + 1$ — *R:* $(x+2)^2 - 3$

**b)** $b(x) = x^2 + 3x + 2$ — *R:* $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

**c)** $c(x) = -2x^2 + 4x - 3$ — *R:* $-2(x-1)^2 - 1$

**2ª Questão** Resolver as equações:

**a)** $\log_{(3/9)} \frac{81}{3} = x$ — *R:* $x = -3$

**b)** $\log_x (x+6) = 2$ — *R:* $x = 3$

**c)** $\frac{8^2}{2^x} = 4^x \sqrt{2}$ — *R:* $x = \frac{11}{6}$

**3ª Questão** Dadas as funções *custo total* $C_*(x)$ (em milhares de dólares) abaixo, determine o custo fixo e trace os gráficos das funções.

**a)** $C_0(x) = x^2 + 2x + 4$ — *R: U\$ 4.000,00 & parábola*

**b)** $C_1(x) = \frac{x+4}{x+2}$ — *R: U\$ 2.000,00 & hipérbole*

**c)** $C_2(x) = \log_3 (x+3) + 4$ — *R: U\$ 5.000,00 & logaritmo*

**d)** $C_3(x) = 2^{(x-1)} + 1$ — *R: U\$ 1.500,00 & exponencial*

**4ª Questão** Nas funções *lucro total* $L_*(x)$ dadas abaixo, determine o ponto de equilíbrio (receita = custo, ou lucro = 0) e esboce os gráficos.

**a)** $L_0(x) = -x^2 + x + 2$ $\boxed{\textit{R: } x = 2 \textit{ \& parábola}}$

**b)** $L_1(x) = \dfrac{x-3}{x}$ $\boxed{\textit{R: } x = 3 \textit{ \& hipérbole}}$

**c)** $L_2(x) = \log_4(x+2) - 1$ $\boxed{\textit{R: } x = 2 \textit{ \& logaritmo}}$

**d)** $L_3(x) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{(x-2)} + 3$ $\boxed{\textit{R: } x = 1 \textit{ \& exponencial}}$

**5ª Questão** Dadas as funções *custo médio* $CM_*(x)$ abaixo, esboce o gráfico e determine para qual valor (em dólares) o custo médio se aproxima quando a produção aumenta.

**a)** $CM_1(x) = -\dfrac{1}{x+2} + 4$ $\boxed{\textit{R: } x \rightsquigarrow \textit{U\\$ 4,00 \& hipérbole}}$

**b)** $CM_2(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{(x+4)} + 3$ $\boxed{\textit{R: } x \rightsquigarrow \textit{U\\$ 3,00 \& exponencial}}$

**6ª Questão** Se as funções abaixo representam a função *receita* $R_*(x)$ (em milhões de dólares) de uma determinada empresa, a partir de quantos milhares de unidades vendidas a empresa terá uma receita superior a U$ 2.000.000,00 (ou seja $R(x) > 2$). (Esboçar os gráficos)

**a)** $R_0(x) = x^2 - 6x + 2$ $\boxed{\textit{R: } x > 6.000 \textit{ unidades \& parábola}}$

**b)** $R_1(x) = -\dfrac{1}{x} + 4$ $\boxed{\textit{R: } x > 500 \textit{ unidades \& hipérbole}}$

**c)** $R_2(x) = \log_3(x-2) + 1$ $\boxed{\textit{R: } x > 5.000 \textit{ unidades \& logaritmo}}$

**d)** $R_3(x) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(x-4)} + 3$ $\boxed{\textit{R: } x > 4.000 \textit{ unidades \& exponencial}}$

---

*Boa Sorte*

3ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *26/Jul/2001* Turno: *Manhã*
Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *02* Matrícula:

**1ª Questão (4,0)** Seja $a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + (\mathcal{K} - 5) & se \quad x \leq -2 \\ x^2 + (3-\mathcal{K})x - 2(\mathcal{K}-1) & se \quad -2 < x \leq \mathcal{K} \\ x - \mathcal{K} & se \quad x > \mathcal{K} \end{cases}$

**a)** Faça o gráfico de $a(x)$;

**b)** Determine os seguintes limites: $\lim_{x\to -2} a(x)$, $\lim_{x\to 0} a(x)$ e $\lim_{x\to \mathcal{K}} a(x)$;

**c)** A função $a(x)$ é contínua em $x = -2$ e $x = \mathcal{K}$? (Justifique)

**d)** Determine $\lim_{x\to\infty} a(x)$, $\lim_{x\to -\infty} a(x)$.

**2ª Questão (3,0)** Calcule, caso exista, os seguintes limites:

**a)** $\lim_{x\to(10-\mathcal{K})} \dfrac{x^2 - 2(10-\mathcal{K})x + (10-\mathcal{K})^2}{x - (10-\mathcal{K})}$

**b)** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - x^3}{x^4 - x^{\mathcal{K}} + 2}$

**c)** $\lim_{x\to 0} b(x)$, onde $b(x) = \begin{cases} x^2 + (10-\mathcal{K}) & se \quad x > 0 \\ -x^2 + (10-\mathcal{K}) & se \quad x \leq 0 \end{cases}$ (Justifique)

**3ª Questão (2,0)** Determinar o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$, que transformam a função $c(x) = \begin{cases} -x^2 - \mathcal{K} - 1 & se \quad x > 2 \\ 2x - \alpha^2 - \mathcal{K} & se \quad x \leq 2 \end{cases}$ em uma função contínua no ponto $x = 2$. (Justifique)

**4ª Questão (1,0)** Se $g(x) = x^2 - 2x - 2$, calcule $\lim_{x\to(10-\mathcal{K})} \dfrac{g(x) - g(10-\mathcal{K})}{x - (10-\mathcal{K})}$.

*Boa Sorte*

3ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *26/Jul/2001* Turno: *Noite*
Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *05* Matrícula:

**1ª Questão (4,0)** Seja $a(x) = \begin{cases} 3^{(x-\mathcal{K})} & se \quad x \leq -2 \\ x^2 + (2-\mathcal{K}).x - 2.\mathcal{K} & se \quad -2 < x \leq \mathcal{K} \\ -x + \mathcal{K} & se \quad x > \mathcal{K} \end{cases}$

**a)** Faça o gráfico de $a(x)$;

**b)** Determine os seguintes limites: $\lim\limits_{x \to -2} a(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} a(x)$ e $\lim\limits_{x \to \mathcal{K}} a(x)$;

**c)** A função $a(x)$ é contínua em $x = -2$ e $x = \mathcal{K}$? (Justifique)

**d)** Determine $\lim\limits_{x \to \infty} a(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x)$.

**2ª Questão (3,0)** Calcule, caso exista, os seguintes limites:

**a)** $\lim\limits_{x \to (\mathcal{K}+1)} \dfrac{x^2 - 2.(\mathcal{K}+1).x + (\mathcal{K}+1)^2}{x - (\mathcal{K}+1)}$

**b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^5 - x^3}{x^4 - x^{\mathcal{K}} + 2}$

**c)** $\lim\limits_{x \to 0} b(x)$, onde $b(x) = \begin{cases} x^2 + (5-\mathcal{K}) & se \quad x \leq 0 \\ -x^2 + (5-\mathcal{K}) & se \quad x > 0 \end{cases}$ (Justifique)

**3ª Questão (2,0)** Determinar o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$, que transformam a função $c(x) = \begin{cases} -x^2 - \mathcal{K} - 1 & se \quad x > 1 \\ 2x - \alpha^2 - \mathcal{K} & se \quad x \leq 1 \end{cases}$ em uma função contínua no ponto $x = 1$. (Justifique)

**4ª Questão (1,0)** Se $g(x) = x^2 - 2x - 2$, calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(\mathcal{K}+x) - g(\mathcal{K})}{x}$.

*Boa Sorte*

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
**CCEN - Departamento de Matemática**
http://www.mat.ufpb.br/sergio

3ª Prova — Matemática Básica I (Pré-prova)

Prof.: *Sérgio* Data: *17/Jul/2001* Turno: *M+N*
Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma(s): Matrícula:

**1ª Questão** Considere as funções: $a(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & se \quad x \leq -2 \\ x + 2 & se \quad -2 < x \leq 2 \\ 3 & se \quad x > 2 \end{cases}$ e $b(x) = \begin{cases} 3^x & se \quad x \leq 0 \\ \log_3(x+1) + 1 & se \quad x > 0 \end{cases}$

**a)** Faça os gráficos de $a(x)$ e $b(x)$;

**b)** Determine $\lim_{x\to -2} a(x)$, $\lim_{x\to 2} a(x)$, $\lim_{x\to 0} b(x)$; $\boxed{\textit{R: } 0, \nexists, 1}$

**c)** A função $a(x)$ é contínua em $x = -2$ e $x = 2$? (Justifique) A função $b(x)$ é contínua em $x = 0$? (Justifique) $\boxed{\textit{R: sim, não e sim}}$

**d)** Determine $\lim_{x\to\infty} a(x)$, $\lim_{x\to-\infty} a(x)$, $\lim_{x\to\infty} b(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} b(x)$. $\boxed{\textit{R: } 3, \infty, \infty, 0}$

**2ª Questão** Calcule, caso exista, os seguintes limites:

**a)** $\lim_{x\to-1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ $\boxed{\textit{R: } 0}$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - x^3}{x^3 - \frac{1}{2}x^4 + 2}$ $\boxed{\textit{R: } -6}$

**c)** $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x} - 2$ $\boxed{\textit{R: } -2}$ **d)** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x^3}{x^4 - 2x^4 + 2}$ $\boxed{\textit{R: } 0}$

**e)** $\lim_{x\to-2} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & se \quad x > -2 \\ x^2 + 5 & se \quad x \leq -2 \end{cases}$ (Justifique) $\boxed{\textit{R: } \nexists}$

**3ª Questão** Determinar o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$, que transformam a função $c(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & se \quad x > 1 \\ 2x - \alpha & se \quad x \leq 1 \end{cases}$ em uma função contínua no ponto $x = 1$. (Justifique) $\boxed{\textit{R: } \alpha = 4}$

**4ª Questão** Se $g(x) = x^2 - 2x - 1$ e $h(x) = -x - 1$.

**a)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{h(x) - h(2)}{x - 2}$. $\boxed{\textit{R: } -1}$

**b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(2+x) - g(2)}{x}$. $\boxed{\textit{R: } 2}$

**Observação: próxima prova dia 26 de julho de 2001 (terceira prova).**

*Boa Sorte*

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

**CCEN - Departamento de Matemática**

http://www.mat.ufpb.br/sergio

4ª Prova | Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *21/Ago/2001* Turno: *Manhã*

Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *02* Matrícula:

**1ª Questão (2,0)** Encontre os **ponto(s) crítico(s)**, caso existam, das funções $f(x) = x^2.e^{(10-\mathcal{K})x-3}$ e $g(x) = \left\{ln\left[x^2 - 2(\mathcal{K}+1)x + (\mathcal{K}+1)^2\right]\right\}^3$.

**2ª Questão (3,0)** Dada a função $m(x) = x^3 - 3(10-\mathcal{K})x^2 + (200-\mathcal{K})$:

**a)** Determine os intervalos onde a função é **crescente**;

**b)** Determine os intervalos onde a função tem **concavidade positiva**;

**c)** Esboce o **gráfico** da função.

**3ª Questão (3,0)** Para a seguinte função de custo total $y_c = C(x) = 2x^2 - 4x + 2(20-\mathcal{K})^2$.

**a)** Encontre as funções **custo médio** $\overline{y}_c$, **custo marginal** e **custo médio marginal**;

**b)** Ache o valor de **custo médio mínimo**[1] e verifique que neste ponto de mínimo, o custo marginal e o custo médio são iguais.

**4ª Questão (3,0)** A função de receita total de uma fábrica de automóveis é expressa pela equação $R(x) = -2x^2 - 4x(\mathcal{K}-15)$;

**a)** Qual é a **receita máxima**[2] que esta companhia pode esperar obter?

**b)** Determine as funções de **receita média** e **receita marginal**?

**c)** Num único gráfico, trace as funções de receita total, média e marginal.

**Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula.**

| Prova | Data | Turma | Turno | Hora | Local |
|---|---|---|---|---|---|
| Final | 28/Ago terça | 02 | Manhã | 08:00 | CCSA 204 |

*Boa Sorte*

[1]Ponto de mínimo da função custo médio

[2]Ponto de máximo da função receita

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
**CCEN - Departamento de Matemática**
http://www.mat.ufpb.br/sergio

4ª Prova — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *21/Ago/2001* Turno: *Noite*
Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *05* Matrícula: ☐☐☐☐☐☐☐◯

**1ª Questão (2,0)** Encontre os **ponto(s) crítico(s)**, caso existam, das funções $f(x) = x.e^{2x-5(10-\mathcal{K})}$ e $g(x) = ln\left\{[x^2 - 6(\mathcal{K}+1)x]^2\right\}$.

**2ª Questão (3,0)** Dada a função $m(x) = x^3 - 3(\mathcal{K}+1)x^2 + (20-\mathcal{K})$:

**a)** Determine os intervalos onde a função é **crescente**;

**b)** Determine os intervalos onde a função tem **concavidade positiva**;

**c)** Esboce o **gráfico** da função.

**3ª Questão (3,0)** Para a seguinte função de custo total $y_c = C(x) = x^2 - 2x + (11-\mathcal{K})^2$.

**a)** Encontre as funções **custo médio** $\overline{y}_c$, **custo marginal** e **custo médio marginal**;

**b)** Ache o valor de **custo médio mínimo**[3] e verifique que neste ponto de mínimo, o custo marginal e o custo médio são iguais.

**4ª Questão (3,0)** A função de receita total de uma fábrica de automóveis é expressa pela equação $R(x) = -x^2 - 2x(\mathcal{K}-11)$;

**a)** Qual é a **receita máxima**[4] que esta companhia pode esperar obter?

**b)** Determine as funções de **receita média** e **receita marginal**?

**c)** Num único gráfico, trace as funções de receita total, média e marginal.

**Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula.**

| Prova | Data | Turma | Turno | Hora | Local |
|---|---|---|---|---|---|
| Final | 28/Ago terça | 05 | Noite | 08:00 | CCSA 204 |

*Boa Sorte*

[3] Ponto de mínimo da função custo médio
[4] Ponto de máximo da função receita

# 1 Algumas Aplicações das Derivadas na Administração e na Economia

## 1.1 CUSTO, CUSTO MÉDIO E CUSTO MARGINAL

Admitindo-se que o *custo total* $y$ para se produzir e negociar $x$ unidades de um artigo é uma função somente de $x$, então a função de custo total pode ser representada por $y_c = f(x)$.

São usadas funções de vários tipos para representar curvas de custo total. Em geral, as curvas de custo tem as seguintes propriedades:

**a)** Quando nenhuma unidade é produzida, o custo total é igual a zero ou positivo, isto é, $f(0) \geq 0$. Se $f(0) > 0$, então $f(0)$ é o montante das despesas gerais ou dos custos fixos de produção.

**b)** O custo total aumenta quando $x$ aumenta e, portanto, $f'(x)$ é sempre positivo.

**c)** O custo de produção de uma quantidade muito grande de qualquer artigo usualmente atinge um ponto no qual este aumenta a uma taxa crescente. Portanto, a curva de custo total é, normalmente, côncava para cima, isto é, $f''(x) > 0$. Entretanto, dentro de uma faixa limitada, a curva de custo total é, com freqüência, côncava para baixo, correspondo ao custo marginal decrescente.

Se a função de custo total é $f(x)$ então, o *custo médio* ou *por unidade* é $\boxed{cm(x) = \overline{y}_c = \dfrac{y_c}{x} = \dfrac{f(x)}{x}}$ e o *custo marginal* é $f'(x)$.

A primeira derivada do custo médio (o *custo médio marginal*) é $cm'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$$\text{Se } \boxed{\text{cm'(x)=0}} \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0, \text{ isto é, } f(x) = xf'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \boxed{\text{f'(x)=cm(x)}}$$

Portanto, o custo médio é mínimo para um valor de $x$, tal que o custo médio se iguale ao custo marginal; isto é, as curvas do custo médio e do custo marginal se interceptam no ponto de custo médio mínimo. Observe que se $x$ existir, supõe-se que seu valor seja mínimo para o qual $cm'(x) = 0$, devido à terceira propriedade das curvas de custo mencionadas acima.

Para uma determinada curva de custo total, a existência deste mínimo pode ser testada da maneira usual.

## 1.2 ELASTICIDADE

A *elasticidade pontual* da função $y = f(x)$ no ponto $x$ é a taxa de variação proporcional em $y$ por unidade de variação em $x$:

$$\boxed{\eta = \frac{Ey}{Ex} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)}$$

Observe que a elasticidade $\eta$ de uma função é independente das unidades com as quais as variáveis são medidas. Isto resulta da definição de elasticidade, em termos de variações proporcionais, que são necessariamente independentes das unidades de medida.

A elasticidade pontual da demanda, oferta, custo, produtividade e outras funções é um importante conceito na teoria econômica.

## 1.3 RECEITA, RECEITA MARGINAL E ELASTICIDADE DE DEMANDA

Para qualquer função demanda dada $y = f(x)$ onde $y$ é o preço por unidade e $x$ é o número de unidades; a *receita total* $R$ é o produto de $x$ por $y$, isto é, $\boxed{R = x.y = x.f(x)}$

A *receita marginal* em relação à demanda é a derivada da receita total em relação a $x$, ou seja, $R'(x)$ e é, portanto, a taxa de variação na receita em relação à variação na demanda.

Observe que a *receita média*, ou a *receita por unidade*, representa também o preço por unidade $y$ - isto é, a curva de receita média e a curva de demanda são idênticas.

Uma vez que $x$ e $y$ são sempre não negativos no contexto de nossa estrutura analítica previamente estabelecida, $R$ também é sempre não negativa. Contudo, $R'(x)$ pode ser positivo ou negativo - isto é, embora a receita total seja sempre não negativa, ela pode aumentar ou diminuir, à medida que a demanda aumenta.

Note também que existe uma relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda, dada por:

$$\boxed{R'(x) = x \cdot f'(x) + y = y\left(\frac{x}{y} \cdot f'(x) + 1\right) = y\left(1 + \frac{Ey}{Ex}\right) = y\,(1 + \eta)}$$

## 1.4 EXERCÍCIO

**1ª Questão** Derive as seguintes funções e encontre os pontos críticos:

**a)** $a(x) = x^3 - 9x^2 - 2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0,6\}}$

**b)** $b(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-2,0,1\}}$

**c)** $c(x) = (2x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2)$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0,1,\frac{9}{5}\}}$

**d)** $d(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-1 \pm \sqrt{2}\}}$

**e)** $f(x) = \left[ln\left(x^2 - 4x + 4\right)\right]^2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1,2,3\}}$

**f)** $g(x) = x.e^{-x-199}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1\}}$

**g)** $h(x) = \ln e^{(2x^2-4)^3}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}}$

**2ª Questão** Em cada função abaixo, determine os intervalos onde a função é crescente[5] (decrescente) e onde a função tem concavidade positiva[6] (negativa). Escoce o gráfico.

**a)** $h(x) = 2x^2 - 4x - 6$ $\boxed{\textit{R: Cres: } (1,\infty) \quad \textit{C.Posit: } \Re}$

**b)** $l(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ $\boxed{\textit{R: Cres: } (-\infty,0)\cup(4,\infty) \quad \textit{C.Posit: } (2,\infty)}$

**c)** $m(x) = x^4 - 4x^3$ $\boxed{\textit{R: Cres: } (3,\infty) \quad \textit{C.Posit: } (-\infty,0)\cup(2,\infty)}$

**3ª Questão** Para cada uma das seguintes funções de custo total, ache o custo médio ($\overline{y}$), custo marginal, custo médio marginal, o mínimo custo médio e mostre que neste mínimo, o custo marginal e o custo médio são iguais (ver **??**).

**a)** $y = x^2 + 200x + 10000$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 100 \quad \overline{y}_{min} = 400}$

**b)** $y = 25x - 8x^2 + x^3$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 4 \quad \overline{y}_{min} = 9}$

**c)** $y = 2x^2 + 5x + 18$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 3 \quad \overline{y}_{min} = 17}$

**d)** $y = 20x + 2x^3 + 4x^5$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 0 \quad \overline{y}_{min} = 20}$

**e)** $y = 2x + x^2lnx$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = \dfrac{1}{e} \quad \overline{y}_{min} = 2 - \dfrac{1}{e} \approx 1.6321}$

**f)** $y = 2xe^{-x} + xe^x$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = \dfrac{1}{2}\ln 2 \quad \overline{y}_{min} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284}$

---

[5] Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ é crescente, basta resolver a inequação $f'(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada primeira.

[6] Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ tem concavidade positiva, basta resolver a inequação $f"(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada segunda.

**4ª Questão** A função de receita total de uma fábrica de móveis coloniais é expressa pela equação $R = 24x - 3x^2$

**a)** Qual é a receita máxima que esta companhia pode esperar obter, supondo que esta equação seja válida? $\boxed{\textit{R: } x_{max} = 4 \quad R_{max} = 48}$

**b)** Que equação representa a função de receita média e marginal?

**c)** Num único gráfico, trace as funções de receita total, média e marginal.

**5ª Questão** Para cada um dos seguintes pares de funções de demanda e de custo (médio ou total), ache o lucro máximo, a receita máxima que se pode obter e verifique que a relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda é válida (ver **??**).

**a)** $y = 18 - x$ e $y_c = 2x + 14$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (8, 50) \quad R_{max} = (9, 81)}$

**b)** $y = 24 - 7x$ e $\overline{y}_c = 6 - x$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{3}{2}, \frac{27}{2}) \quad R_{max} = (\frac{12}{7}, \frac{144}{7})}$

**c)** $y = 26 - 3x^2$ e $y_c = 3x^2 + 2x + 14$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{4}{3}, \frac{50}{9}) \; R_{max} = (\frac{1}{3}\sqrt{26}, \frac{52}{9}\sqrt{26})}$

**d)** $y = 12 - 4x$ e $y_c = 8x - x^2$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \quad R_{max} = (\frac{3}{2}, 9)}$

**e)** $y = 12 - 5x$ e $\overline{y}_c = 4x + 6$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{1}{3}, 1) \quad R_{max} = (\frac{6}{5}, \frac{36}{5})}$

Datas das provas

| Prova | Data | Turma | Turno | Local |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 21/Ago terça | 02 e 05 | Manhã e Noite | sala de aula |
| **Final** | **28/Ago terça** | 02 e 05 | Manhã e Noite | sala de aula |

*Boa Sorte*

Final

# Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *28/Ago/2001* Turno: *Manhã*
Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *02* Matrícula:

**1ª Questão (2,5)** Em uma fábrica de componentes eletrônicos, suponha que o custo fixo de produção de um determinado componente seja de U$ 5.400,00 e o custo variável seja de $\dfrac{2\mathcal{K}+5}{2}$ dólares por unidade.

**a)** Qual o **custo médio** para a produção de 3.000 e 4.000 componentes?

**b)** Se cada componente for vendido ao preço de $(10+\mathcal{K})$ dólares. Qual é o **ponto de equilíbrio**?

**c)** Quantos componentes devem ser vendidos para que a fábrica obtenha um **lucro** igual à U$ 5.400,00?

**2ª Questão (1,25)** Na função $L(x) = -(1/2)^{(x-6-K)} + 2^{(5-K)}$ *lucro total* de uma fábrica, determine o **ponto de equilíbrio** (em **centenas** de unidades) e esboce o **gráfico** de $L(x)$.

**3ª Questão (1,25)** Esboce o **gráfico** e determine para qual **valor** (em dólares) o *custo médio* $CM(x) = \dfrac{1}{x+2} + (10-\mathcal{K})$ se aproxima, quando a produção aumenta.

**4ª Questão (2,5)** Seja $a(x) = \begin{cases} \log_3(x+3) + (\mathcal{K}-5) & se \quad x \leq -2 \\ x^2 + (3-\mathcal{K})x - 2(\mathcal{K}-1) & se \quad -2 < x \leq \mathcal{K} \\ x - \mathcal{K} & se \quad x > \mathcal{K} \end{cases}$

**a)** Faça o **gráfico** de $a(x)$;

**b)** A função $a(x)$ é **contínua** em $x=-2$ e $x=\mathcal{K}$? (Justifique)

**5ª Questão (2,5)** Dada a função $m(x) = -x^3 + 3(10-\mathcal{K})x^2 - (200-\mathcal{K})$:

**a)** Determine os intervalos onde a função é **crescente**;

**b)** Determine os intervalos onde a função tem **concavidade positiva**;

**c)** Esboce o **gráfico** da função.

**Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula.**

*Boa Sorte*

# UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

**CCEN - Departamento de Matemática**

http://www.mat.ufpb.br/sergio

Final — Matemática Básica I

Prof.: *Sérgio* Data: *28/Ago/2001* Turno: *Noite*

Curso: Nome:

Período: *01.1* Turma: *05* Matrícula:

**1ª Questão (2,5)** Em uma fábrica de componentes eletrônicos, suponha que o custo fixo de produção de um determinado componente seja de U$ 5.400,00 e o custo variável seja de $\dfrac{2\mathcal{K}+3}{2}$ dólares por unidade.

**a)** Qual o **custo médio** para a produção de 3.000 e 4.000 componentes?

**b)** Se cada componente for vendido ao preço de $(4+\mathcal{K})$ dólares. Qual é o **ponto de equilíbrio**?

**c)** Quantos componentes devem ser vendidos para que a fábrica obtenha um **lucro** igual à U$ 5.400,00?

**2ª Questão (1,25)** Na função $L(x) = \log_{(\mathcal{K}+2)}(x+\mathcal{K}+2) - 2$ *lucro total* de uma fábrica, determine o **ponto de equilíbrio** (em **centenas** de unidades) e esboce o **gráfico** de $L(x)$.

**3ª Questão (1,25)** Esboce o **gráfico** e determine para qual **valor** (em dólares) o *custo médio* $CM(x) = \dfrac{1}{x+1} + (\mathcal{K}+2)$ se aproxima, quando a produção aumenta.

**4ª Questão (2,5)** Seja $a(x) = \begin{cases} 3^{(x+2)} - \mathcal{K} & se \quad x \le -2 \\ x^2 + (2-\mathcal{K}).x - 2.\mathcal{K} & se \quad -2 < x \le \mathcal{K} \\ -x + \mathcal{K} & se \quad x > \mathcal{K} \end{cases}$

**a)** Faça o **gráfico** de $a(x)$;

**b)** A função $a(x)$ é **contínua** em $x=-2$ e $x=\mathcal{K}$? (Justifique)

**5ª Questão (2,5)** Dada a função $m(x) = -x^3 + 3(\mathcal{K}+1)x^2 - (20-\mathcal{K})$:

**a)** Determine os intervalos onde a função é **crescente**;

**b)** Determine os intervalos onde a função tem **concavidade positiva**;

**c)** Esboce o **gráfico** da função.

**Obs.: Considere a constante $\mathcal{K}$ como sendo o último número da sua matrícula.**

*Boa Sorte*