



4ª Prova

Matemática Básica I (Pré-prova)

Prof.: Sérgio Data: 05/Mar/2001

Turno: M+N

Curso: Nome:

Período: 00.1

Turma(s):

Matrícula:

1 Algumas Aplicações das Derivadas na Administração e na Economia

1.1 CUSTO, CUSTO MÉDIO E CUSTO MARGINAL

Admitindo-se que o *custo total* y para se produzir e negociar x unidades de um artigo é uma função somente de x , então a função de custo total pode ser representada por $y_c = f(x)$.

São usadas funções de vários tipos para representar curvas de custo total. Em geral, as curvas de custo tem as seguintes propriedades:

1. Quando nenhuma unidade é produzida, o custo total é igual a zero ou positivo, isto é, $f(0) \geq 0$. Se $f(0) > 0$, então $f(0)$ é o montante das despesas gerais ou dos custos fixos de produção.
2. O custo total aumenta quando x aumenta e, portanto, $f'(x)$ é sempre positivo.
3. O custo de produção de uma quantidade muito grande de qualquer artigo usualmente atinge um ponto no qual este aumenta a uma taxa crescente. Portanto, a curva de custo total é, normalmente, côncava para cima, isto é, $f''(x) > 0$. Entretanto, dentro de uma faixa limitada, a curva de custo total é, com frequência, côncava para baixo, correspondendo ao custo marginal decrescente.

Se a função de custo total é $f(x)$ então, o *custo médio* ou *por unidade* é

$$cm(x) = \bar{y}_c = \frac{y_c}{x} = \frac{f(x)}{x} \text{ e o custo marginal é } f'(x).$$

A primeira derivada do custo médio (o *custo médio marginal*) é $cm'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$$\text{Se } \boxed{cm'(x)=0} \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0, \text{ isto é, } f(x) = xf'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \boxed{f'(x)=cm(x)}$$

Portanto, o custo médio é mínimo para um valor de x , tal que o custo médio se iguale ao custo marginal; isto é, as curvas do custo médio e do custo marginal se interceptam no ponto de custo médio mínimo. Observe que se x existir, supõe-se que seu valor seja mínimo para o qual $cm'(x) = 0$, devido à terceira propriedade das curvas de custo mencionadas acima.

Para uma determinada curva de custo total, a existência deste mínimo pode ser testada da maneira usual.

1.2 ELASTICIDADE

A *elasticidade pontual* da função $y = f(x)$ no ponto x é a taxa de variação proporcional em y por unidade de variação em x :

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)$$

Observe que a elasticidade η de uma função é independente das unidades com as quais as variáveis são medidas. Isto resulta da definição de elasticidade, em termos de variações proporcionais, que são necessariamente independentes das unidades de medida.

A elasticidade pontual da demanda, oferta, custo, produtividade e outras funções é um importante conceito na teoria econômica.

1.3 RECEITA, RECEITA MARGINAL E ELASTICIDADE DE DEMANDA

Para qualquer função demanda dada $y = f(x)$ onde y é o preço por unidade e x é o número de unidades; a *receita total* R é o produto de x por y , isto é, $R = x \cdot y = x \cdot f(x)$

A *receita marginal* em relação à demanda é a derivada da receita total em relação a x , ou seja, $R'(x)$ e é, portanto, a taxa de variação na receita em relação à variação na demanda.

Observe que a *receita média*, ou a *receita por unidade*, representa também o preço por unidade y - isto é, a curva de receita média e a curva de demanda são idênticas.

Uma vez que x e y são sempre não negativos no contexto de nossa estrutura analítica previamente estabelecida, R também é sempre não negativa. Contudo, $R'(x)$ pode ser positivo ou negativo - isto é, embora a receita total seja sempre não negativa, ela pode aumentar ou diminuir, à medida que a demanda aumenta.

Note também que existe uma relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda, dada por:

$$R'(x) = x \cdot f'(x) + y = y \left(\frac{x}{y} \cdot f'(x) + 1 \right) = y \left(1 + \frac{Ey}{Ex} \right) = y(1 + \eta)$$

1.4 EXERCÍCIO

1ª Questão Derive as seguintes funções e encontre os pontos críticos:

a) $a(x) = x^3 - 9x^2 - 2$ $R: P.C.=\{0,6\}$

b) $b(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ $R: P.C.=\{-2,0,1\}$

c) $c(x) = (2x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2)$ $R: P.C.=\{0,1,\frac{9}{5}\}$

d) $d(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ $R: P.C.=\{-1 \pm \sqrt{2}\}$

e) $f(x) = [\ln(x^2 - 4x + 4)]^2$ $R: P.C.=\{1,2,3\}$

f) $g(x) = x.e^{-x-199}$ $R: P.C.=\{1\}$

g) $h(x) = \ln e^{(2x^2-4)^3}$ $R: P.C.=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$

2ª Questão Em cada função abaixo, determine os intervalos onde a função é crescente¹ (decrescente) e onde a função tem concavidade positiva² (negativa). Esboce o gráfico.

a) $h(x) = 2x^2 - 4x - 6$ $R: Cres: (1, \infty) \quad C.Posit: \mathbb{R}$

b) $l(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ $R: Cres: (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \quad C.Posit: (2, \infty)$

c) $m(x) = x^4 - 4x^3$ $R: Cres: (3, \infty) \quad C.Posit: (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

3ª Questão Para cada uma das seguintes funções de custo total, ache o custo médio (\bar{y}), custo marginal, custo médio marginal, o mínimo custo médio e mostre que neste mínimo, o custo marginal e o custo médio são iguais (ver ??).

a) $y = x^2 + 200x + 10000$ $R: x_{min} = 100 \quad \bar{y}_{min} = 400$

b) $y = 25x - 8x^2 + x^3$ $R: x_{min} = 4 \quad \bar{y}_{min} = 9$

c) $y = 2x^2 + 5x + 18$ $R: x_{min} = 3 \quad \bar{y}_{min} = 17$

d) $y = 20x + 2x^3 + 4x^5$ $R: x_{min} = 0 \quad \bar{y}_{min} = 20$

e) $y = 2x + x^2 \ln x$ $R: x_{min} = \frac{1}{e} \quad \bar{y}_{min} = 2 - \frac{1}{e} \approx 1.6321$

f) $y = 2xe^{-x} + xe^x$ $R: x_{min} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \bar{y}_{min} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$

¹Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ é crescente, basta resolver a inequação $f'(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada primeira.

²Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ tem concavidade positiva, basta resolver a inequação $f''(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada segunda.

4ª Questão A função de receita total de uma fábrica de móveis coloniais é expressa pela equação $R = 24x - 3x^2$

a) Qual é a receita máxima que esta companhia pode esperar obter, supondo que esta equação seja válida? $R: x_{max} = 4 \quad R_{max} = 48$

b) Que equação representa a função de receita média e marginal?

c) Num único gráfico, trace as funções de receita total, média e marginal.

5ª Questão Para cada um dos seguintes pares de funções de demanda e de custo (médio ou total), ache o lucro máximo, a receita máxima que se pode obter e verifique que a relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda é válida (ver ??).

a) $y = 18 - x$ e $y_c = 2x + 14$

$$R: L_{max} = (8, 50) \quad R_{max} = (9, 81)$$

b) $y = 24 - 7x$ e $\bar{y}_c = 6 - x$

$$R: L_{max} = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{2}\right) \quad R_{max} = \left(\frac{12}{7}, \frac{144}{7}\right)$$

c) $y = 26 - 3x^2$ e $y_c = 3x^2 + 2x + 14$

$$R: L_{max} = \left(\frac{4}{3}, \frac{50}{9}\right) \quad R_{max} = \left(\frac{1}{3}\sqrt{26}, \frac{52}{9}\sqrt{26}\right)$$

d) $y = 12 - 4x$ e $y_c = 8x - x^2$

$$R: L_{max} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad R_{max} = \left(\frac{3}{2}, 9\right)$$

e) $y = 12 - 5x$ e $\bar{y}_c = 4x + 6$

$$R: L_{max} = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad R_{max} = \left(\frac{6}{5}, \frac{36}{5}\right)$$

Datas das provas

Prova	Data	Turma	Turno	Local
4	29/03 quinta	02 e 04	Manhã e Noite	sala de aula
4	30/03 sexta	01	Manhã	sala de aula
Final	05/04 quinta	01, 02 e 04	Manhã e Noite	à definir

Boa Sorte