Código de Identificação do Candidato:

Álgebra Linear

PPGMat/UFPB – Prova do Processo Seletivo 2024.1

1. (1,5) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer e U, W subespaços de V tais que $U \cap W = \{O\}$. Mostre que se B_1 e B_2 são subconjuntos linearmente independentes de U e W respectivamente, então $B_1 \cup B_2$ é um subconjunto linearmente independente de V.

2. Considere a seguinte matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   a) (1,0) Determine o polinômio minimal de A;
   b) (1,0) Ache a forma de Jordan de A.

3. (1,5) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer e $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $m_T(x)$, o polinômio minimal de T, for um produto de polinômios de grau 1 e sem raízes repetidas, então o operador T é diagonalizável.

4. (2,0) Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ das funções contínuas $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ munido do seguinte produto interno
$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$
   Mostre que o subconjunto $\{1, \sin(x), \cos(x)\}$ é um conjunto ortogonal.

5. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau ≤ 2 e T: $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $T(ax^2 + bx + c) := (a + b + 3c)x^2 + (2b - c)x + 2c$.
   a) (1,0) Determine o polinômio característico de T;
   b) (1,0) Determine os autovalores e seus respectivos autoespaços de T;
   c) (1,0) O operador T é diagonalizável? Justifique!

Código de Identificação do Candidato:

Análise Real

PPGMat/UFPB – Prova do Processo Seletivo 2024.1

1. (1.0) Considere a sequência definida por

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Verifique que (a_n) é monótona e limitada. Use isto para concluir que (a_n) é convergente.

2. (2.0) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos não vazios e disjuntos. Suponha que A é compacto e B é fechado. Prove que existem $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ tais que

$$|a_0 - b_0| \leq |a - b|, \quad \forall a \in A, b \in B.$$

3. (1.0) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para cada $x \in [a, b]$, existe $z \in [a, b]$ satisfazendo $|f(z)| \leq |f(x)|/2$. Mostre que f possui um zero em $[a, b]$.

4. (2.0) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita homogênea de grau k, onde k é um numero natural, quando satisfaz a condição

$$f(tx) = t^k f(x), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Verifique que toda função homogênea de grau k, derivável, satisfaz a identidade de Euler, a saber

$$f'(x)x = kf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Prove que toda função homogênea de grau k, que é derivável, é necessariamente um polinômio de grau k.

5. (2.0) Responda os seguintes itens:

a) Enuncie o Teorema do Valor Médio.

b) Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade $e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \geq 0$.

c) Use a desigualdade anterior para provar que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ é divergente.

6. (2.0) Responda os seguintes itens:

a) Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo.

b) Prove que a única função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição

$$\int_0^x f(t)dt = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é a função identicamente nula.

Código de Identificação do Candidato:

Análise no $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.1

1. (1,5) Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação contínua. Suponha que para cada $x \in X$ exista um único $y \in K$ tal que $f(x, y) = 0$. Prove que a função $y = y(x)$, assim definida, depende continuamente de x.

2. (1,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2y/(x^2 + y^2)$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que, para todo $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, existe a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$. A função f é diferenciável na origem? (Justifique sua resposta).

3. (1,0) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é homogênea de grau $m \in \mathbb{N}$ se $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Se f é também diferenciável, mostre que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)x_i = mf(x),$$

4. (1,5) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1. Suponha que $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para cada $x \in U$. Mostre que f é uma aplicação aberta, isto é, para cada aberto $A \subset U$, $f(A)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f(2, -1) = -1$. Sejam $G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por
$$\begin{aligned} G(x, y, u) &= f(x, y) + u^2 \\ H(x, y, u) &= ux + 3y^3 + u^3 \end{aligned} \tag{1}$$
As equações $G(x, y, u) = 0$ e $H(x, y, u) = 0$ tem a solução $(x, y, u) = (2, -1, 1)$.

   a) (1,0) Quais condições sobre Df (a derivada de f) assegura que existem funções C^1 $x = g(y)$ e $u = h(y)$ definidas sobre uma aberto de $\mathbb{R}$ que satisfazem ambas as equações em (1) e que $g(-1) = 2$,

   $h(-1) = 1$? (Justifique sua resposta!)

   b) (1,0) Sob as condições do item a), e supondo que $Df(2, -1) = [1 \ -3]$, encontre $g'(-1)$ e $h'(-1)$.

6. (1,0) Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o gráfico de f, dado por $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$, tem medida nula em $\mathbb{R}^2$.

7. a) (0,5) Enuncie precisamente o Teorema da Mudança de Variável para integrais múltiplas;

   b) (1,0) Seja Ω a região em $\mathbb{R}^2$ limitada pela curva $x^2 - xy + 2y^2 = 1$. Expresse a integral $\displaystyle\int_\Omega xy \, dxdy$ como uma outra integral sobre a bola unitária em $\mathbb{R}^2$ centrada na origem. (*Dica:* Complete quadrados!)

Código de Identificação do Candidato:

Estruturas Algébricas

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.1

1. Seja $(G, *)$ um grupo com elemento neutro e. Se existir um menor inteiro positivo m tal que $a^m = e$ para todo a em G, então dizemos que G possui expoente finito. Neste caso usamos a notação $\exp(G) = m$.

   (a) (0,5) Se $\exp(G) = 2$, então mostre que G é um grupo abeliano.

   (b) (1,0) Se $\exp(G) = p$ com $p > 2$ primo, então é G abeliano? Justifique sua resposta!

   (c) (0,5) Se G possui expoente finito, então é G um grupo finito? Justifique sua resposta!

2. (1,0) Seja S_5 o grupo das $5! = 120$ permutações de $1, 2, \ldots, 5$ (com a operação de composição). Dado $\sigma \in S_5$, denotamos por $Z(\sigma) = \{\tau \in S_5 \mid \tau\sigma = \sigma\tau\}$. Determine o valor da seguinte expressão

$$\frac{1}{|S_5|}\sum_{\sigma \in S_5} |Z(\sigma)|.$$

3. Considere o anel $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \ldots, \overline{p-1}\}$ sendo p primo. Seja $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ o grupo* constituído pelas matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $\mathbb{Z}_p$ e determinante não nulo. Seja $\mathrm{T} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ formado pelas matrizes triangulares superiores† $(a_{i,j})$ tais que $a_{i,i} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   (a) (0,5) Determine a ordem do grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

   (b) (1,0) Mostre que T é um subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

   (c) (0,5) É o subgrupo T um p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$? Justifique sua resposta!

4. Considere o anel quociente $A := \dfrac{\mathbb{Q}[x,y]}{(x^2+y^2-1)}$.‡

   (a) (1,0) Considere o ideal $(\overline{x-a}, \overline{y-b}) \subseteq A$ com $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.§ Mostre que $(\overline{x-a}, \overline{y-b})$ é um ideal maximal do anel A.

   (b) (1,0) Considere o homomorfismo de anéis $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\overline{p(x,y)} \longmapsto p(\sqrt{2}, i)$. Determine geradores para o núcleo de φ.

5. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo com unidade. Se I é um ideal de A e $x \in A - I$, então defina $(I : x) := \{a \in A \mid ax \in I\}$. Mostre que

   (a) (0,5) $(I : x)$ é um ideal próprio de A.

   (b) (1,0) se $I + xA$ e $(I : x)$ são finitamente gerados, então I é finitamente gerado.

---

*com o produto usual de matrizes.

†$(a_{i,j})$ é triangular superior se, $a_{i,j} = 0$ para todo $i > j$.

‡Sendo (x^2+y^2-1) o ideal gerado por x^2+y^2-1 em $\mathbb{Q}[x,y]$.

§Se $\alpha, \beta \in A$, então (α, β) denota o ideal gerado por α e β em A.

6. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo com unidade. Considere $I \subset A$ ideal e $x \in A - I$.

   (a) (1,0) Se $I + xA$ e $(I : x)$ são ideais principais, então podemos concluir que I é principal? Justifique sua resposta!

   (b) (0,5) Se $A = \mathbb{R}[x, y]$ e $I = yA$, indique se os ideais $I + xA$ e $(I : x)$ são ideais principais ou não. Justifique sua resposta!

Código de Identificação do Candidato:

Geometria Diferencial

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.1

1. (2,0) Mostre que uma curva parametrizada plana é um círculo se e somente se sua curvatura é uma constante positiva. Encontre um exemplo de curva parametrizada não-planar que possua curvatura constante.

2. (1.5) Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares. Defina o conceito de diferenciabilidade de uma função $f : S_1 \to S_2$. A seguir, mostre que a esfera e o elipsóide são difeomorfos.

3. (1,0) Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular cujo traço está contido em uma esfera de raio $R > 0$. Prove que a curvatura κ de α satisfaz a desigualdade

$$\kappa \geq \frac{1}{R}.$$

4. Responda:

   (i) (1,0) Defina o conceito de isometria local entre superfícies regulares.

   (ii) (1,0) Enuncie o teorema Egregium de Gauss. A seguir, mostre que o plano e o cilindro são localmente isométricos.

5. (2,0) Calcule a curvatura Gaussiana e a curvatura média da superfície dada pelo gráfico de $z = x^2 + y^2$.

6. Assinale certo ou errado nas afirmações abaixo justificando sua resposta.

(i) (0,5) Toda curva contida em uma superfície regular que é, ao mesmo tempo, linha de curvatura e geodésica é uma curva plana.

(ii) (0,5) Todo meridiano de uma superfície de rotação é uma geodésica.

(iii) (0,5) Se S não é homeomorfa a uma esfera, então S possui apenas pontos elípticos e hiperbólicos.