Código de Identificação do Candidato:

Estruturas Algébricas

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2023.1

1. Seja $(G,*)$ um grupo com elemento neutro e. Sejam a e b elementos de G satisfazendo a relação $a*b*a^{-1}=b^2$, sendo $b\neq e$.

   (a) (1,0) Mostre que $a^5*b*a^{-5}=b^{32}$.

   (b) (0,5) Se a tem ordem 5 então determine a ordem de b.

   (c) (0,5) Seja $D_6=\langle\theta,r\rangle\leq S_6$ sendo $\theta=(1\,2\,3\,4\,5\,6)$ e $r=(2\,6)(3\,5)$. Existem elementos $a,b\in D_6$ com $b\neq e$ tais que $a*b*a^{-1}=b^2$? Justifique sua resposta!

2. Sejam $(G,*)$ e $(G_1,\bullet)$ grupos. Assuma que $\varphi: G\longrightarrow G_1$ e $\psi: G_1\longrightarrow G$ são homomorfismos de grupos tais que $\psi\circ\varphi(x)=x$ para todo $x\in G$.

   (a) (1,0) Mostre que $G_1=\varphi(G)\ker(\psi)$ sendo $\ker(\psi)$ o núcleo do homomorfismo ψ.

   (b) (1,0) Se $\varphi(G)$ for um subgrupo normal de G_1, podemos concluir que $G_1\cong\varphi(G)\times\ker(\psi)$? Justifique sua resposta!

3. (1,0) Seja G um grupo finito de ordem $p^n m$ sendo $n\geq 1$ e p um número primo tal que $p>m$. Se S for um p–subgrupo de Sylow de G, então mostre que S é um subgrupo normal de G.

4. Seja $X=\Big\{x\in\mathbb{R}\mid -1\leq x\leq 1\Big\}$ e $\mathcal{C}_X$ o anel das funções contínuas* de X em $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação usuais.

   (a) (0,5) $I=\{f\in\mathcal{C}_X\mid f(x)=0\ \forall\, 0\leq x\in X\}$ é um ideal primo de $\mathcal{C}_X$? Justifique sua resposta!

   (b) (0,5) Fixe $a\in X$. Mostre que $\mathfrak{m}_a=\{f\in\mathcal{C}_X\mid f(a)=0\}$ é um ideal maximal de $\mathcal{C}_X$.

   (c) (1,0) Se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de $\mathcal{C}_X$, existe $a\in X$ tal que $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_a$? Justifique sua resposta!

5. Sejam A um anel comutativo com unidade, I e J ideais do anel A.

   (a) (1,0) Mostre que $(I:J)=\{a\in A\mid aJ\subseteq I\}$ é um ideal de A.

   (b) (0,5) Se $A=\mathbb{Z}$, $I=m\mathbb{Z}$, $J=n\mathbb{Z}$ sendo m e n inteiros positivos primos entre si. Determine $d\in\mathbb{Z}$ tal que $(I:J)=d\mathbb{Z}$.

6. Seja $C=\{(a,a^2,a^3)\mid a\in\mathbb{C}\}\subset\mathbb{C}^3$ e $\mathcal{A}=\mathbb{C}[x,y,z]$.

   (a) (0,5) Mostre que $J=\{p\in\mathcal{A}\mid p(\mathrm{x})=0\ \forall\,\mathrm{x}\in C\}$ é um ideal do anel $\mathcal{A}$.

   (b) (1,0) Se J for finitamente gerado, determine geradores para o ideal J.

---

*com a topologia euclidiana

Código de Identificação do Candidato:

Análise no $\mathbb{R}^n$

Prova do Processo Seletivo 2023.1

1. (1,5) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e denotemos por $\| \cdot \|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. É conhecido que existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   a) Mostre que $\|T\|_* := \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$.

   b) Mostre que $\|T\|_*$ é uma norma no espaço das transformações lineares.

2. (1,5) Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $f : K \to K$ uma função contínua. Suponha que $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$, para todo $x, y \in K$.

   a) Mostre que f é injetiva.

   b) Mostre que $f^{-1} : f(K) \to K$ é contínua.

   c) Mostre que $f(K) = K$.

3. (1,5) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dadas as aplicações diferenciáveis $f, g : U \to \mathbb{R}^n$, defina a função real $\varphi : U \to \mathbb{R}$, pondo para cada $x \in U$,

$$\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle,$$

   onde $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$. Mostre que φ é diferenciável e calcule a derivada $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

4. (1,5) Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. A função $\mathbf{h} : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{h}(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

   denomina-se hessiano de f. Mostre que se (a, b) é um ponto crítico de f. Então

   i) Se $f_{xx}(a, b) > 0$ e $\mathbf{h}(a, b) > 0$, então (a, b) será ponto de mínimo local de f.

   ii) Se $f_{xx}(a, b) < 0$ e $\mathbf{h}(a, b) > 0$, então (a, b) será ponto de máximo local de f.

   ii) Se $\mathbf{h}(a, b) = 0$, então nada se pode afirmar.

   Sugestão: Para $v = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ considere a forma quadrática

$$H_{(a,b)}(v^{(2)}) = (\alpha_1 \quad \alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

5. (1,5) Seja $P_0(t) = a_0t^3 - b_0t^2 + c_0t - d_0$ um polinômio com coeficientes reais e três raízes reais distintas. Mostre que qualquer polinômio da forma $P(t) = at^3 - bt^2 + ct - d$ que tem coeficiente reais (a, b, c, d) suficientemente próximos de (a_0, b_0, c_0, d_0) também tem três raízes reais distintas e que variam em classe C^∞ com os coeficientes do polinômio.

   Sugestão: Defina $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pondo $F(x, y, z) = (x+y+z, xy+xz+yz, xyz)$. Pela relações de Girard para o polinômio $P_0(t)$ é válido que $F(x_0, y_0, z_0) = (\frac{b_0}{a_0}, \frac{c_0}{a_0}, \frac{d_0}{a_0})$, onde x_0, y_0, z_0 são as raízes de $P_0(t)$.

6. (1,5) Dê condições sobre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 e $f(2, -1) = -1$ para que à curva γ : $\begin{cases} f(x, y) + z^2 = 0 \\ xz + 3y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$ possa ser resolvida por $x = x(y)$ e $z = z(y)$ localmente em $(2, -1, 1)$. Dê a reta tangente à curva γ em $(2, -1, 1)$. Supondo $f'(2, -1) = (1 \quad -3)$, calcule $x'(-1)$ e $z'(-1)$.

7. (1,0) Enuncie o Teorema da Mudanca de Variáveis e use-o para mostrar que o sólido limitado pelo elipsóide
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$
   em que $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c > 0$, tem volume igual a $\frac{4}{3}\pi abc$.

Código de Identificação do Candidato:

Geometria Diferencial

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2023.1

1. Seja $\alpha(t) = (acos(t/c), a\sin(t/c), bt/c)$, $t \in \mathbb{R}$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

   (a) (1,0) Mostre que α está parametrizada pelo comprimento de arco.

   (b) (1,0) Determine a curvatura de α.

2. (i) (1,0) Mostre que um ponto $p \in S$ é umbílico se e somente se $H^2(p) = K(p)$.

   (ii) (1,0) Mostre que as únicas superfícies conexas totalmente umbílicas são parte de uma esfera e ou de plano.

3. Calcule a curvatura Gaussiana das seguintes superfícies:

   (i) (1,0) Esfera

   (iii) (1,0) Cilindro

4. Responda:

   (i) (1,0) Dada uma superfície compacta orientável S homeomorfa a esfera, mostre que

   $$\int_S H^2 dA \geq 4\pi.$$

   Além disso, a igualdade é válida se e só se S é uma esfera.

   (ii) (0,5) Seja T um triângulo geodésico em uma superfície S. Mostre que

   $$\int_T K dA + \pi = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i,$$

   onde φ_i são os ângulos internos de T.

5. (i) (0,5) Mostre que se a curvatura média é zero em um ponto não-planar, então esse ponto tem duas direções assintóticas ortogonais. Encontre um exemplo de uma superfície que possui um ponto com curvatura média zero mas que é não planar.

   (ii) (0,5) Mostre que se uma geodésica(que não seja uma reta) é uma curva plana, então ela é uma linha de curvatura. Encontre um exemplo de uma curva que é linha de curvatura, plana e não é geodésica.

6. Assinale certo ou errado nas afirmações abaixo justificando sua resposta.

(i) (0,5) Existem superfícies mínimas fechadas em $\mathbb{R}^3$.

(ii) (0,5) Em uma superfície de rotação, todos os paralelos são geodésicas.

(iii) (0,5) Se S não é homeomorfa a uma esfera, então S possui pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos.

Código de Identificação do Candidato:

Álgebra Linear

Prova do Processo Seletivo 2023.1

1. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2.

   (a) (0,5) Mostre que $\mathcal{B} = \{3x - x^2, 1, 2 + x\}$ é uma base (ordenada) de V;

   (b) (0,5) Obtenha as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2$ com relação à base $\mathcal{B}$, ou seja, a matriz $[p(x)]_{\mathcal{B}}$.

2) Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, -1, 0, 1); (0, 1, 1, 1)].$$

   a) (0,5) Ache uma base para W_1 e uma base para W_2;

   b) (0,5) Ache uma base de $W_1 \cap W_2$ e $\dim(W_1 \cap W_2)$;

   c) (0,5) Qual a dimensão de $W_1 + W_2$? $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique sua resposta.

3. Seja $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos números complexos e considere a função $T : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$T(x + iy) = \begin{pmatrix} x + 7y & 5y \\ -10y & x - 7y \end{pmatrix}.$$

   Vamos considerar $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

   (a) (0,5) Mostre que T é uma transformação linear.

   (b) (0,5) Considerando $\beta = \{1, i\}$ como uma base de $\mathbb{C}$ (sobre $\mathbb{R}$) e

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   como uma base para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, determine $[T]_\gamma^\beta$.

   (b) (1,0) $T(z_1.z_2) = T(z_1).T(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4. (1,5) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo F. Demonstrar que V e W são isomorfos se, e somente se, $\dim V = \dim W$.

5. (1,0) Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que exista um inteiro positive k tal que $T^k = 0$. Mostre que $T^n = 0$.

6. Considere no espaço $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o espaço das matrizes reais quadradas de ordem 2) o produto interno dado por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

a) (0,5) Calcule o ângulo entre as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (1,0) Ache uma base ortonormal para o subespaço gerado pelas matrizes A e B.

7. Seja $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo sobre um espaço vetorial V.

   a) (0,5) Mostre que existe um vetor $u \in V$ tal que $f(u) = 1$;

   b) (1,0) Mostre que $V = Ker(f) \oplus [u]$.
   (*Sugestão:* Analise uma igualdade da forma $v = w + \lambda u$, com $w \in Ker(f)$)

Código de Identificação do Candidato:

Análise na Reta

Prova do Processo Seletivo 2023.1

1. (1,0) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reais positivos. Se $\dfrac{a_k}{b_k} \in (\alpha, \beta)$ para $k = 1, 2 \ldots n$, mostre que
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \in (\alpha, \beta).$$

2. (1,0) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e $L = \sup A$. Mostre que existe uma sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to L$.

3. (1,0) Mostre que $(1, +\infty) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+1}{n}, +\infty\right)$.

4. (1,0) Prove que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge.

   (*Sugestão:* Comece justificando que $\ln k < \sqrt{k}$ para todo $k > k_0$).

5. (1,5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$
   Mostre que f é sobrejetiva.

6. (1,5) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x) > 0$ para todo $x \in X$ então $\inf\limits_{x \in X} f(x) > 0$? E se X for compacto, o que podemos dizer?

7. (1,5) Sejam I um intervalo da reta e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Suponha que $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$. Mostre que f é decrescente em I. A recíproca deste fato é verdadeira? (Justifique).

8. a) (1,0) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se f é contínua num ponto $c \in (a, b)$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

   b) (0,5) Dê um exemplo mostrando que, se retirarmos a hipótese de continuidade no ponto c, então o resultado não é válido.