Código de Identificação do Candidato:

Álgebra Linear

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.2

1. (1,0) Dados os vetores $u = (1, -1, 2)$ e $v = (-1, 2, 3)$ em $\mathbb{R}^3$, determine o valor de λ de modo que $w = (-3, \lambda, 2\lambda + 3)$ seja combinação linear de u e v.

2. Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ com grau menor ou igual a 3.

   (a) (1,0) Mostre que $\mathcal{B} = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é uma base de V;

   (b) (1,0) Sendo $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ a base canônica de V, determine $[I]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ a matriz de mudança de base da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$.

   (c) (0,5) Dado $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, determine $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ a matriz das coordenadas de $p(x)$ com relação a base $\mathcal{B}$.

3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $\mathbb{R}$.

   (a) (1,0) Se n for ímpar, prove que não existe nenhuma transformação linear $T : V \to V$ tal que $Im(T) = Nuc(T)$;

   (b) (1,0) Mostre que a afirmação no item (a) é falsa se n for par.

4. (1,0) Mostre que toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A^3 = A$, é semelhante a uma matriz diagonal.

5. (1,5) Considere o operador *linear* $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por

   $$D(p(x)) = x^2 p''(x),$$

   em que $p''(x)$ denota a derivada segunda de $p(x)$. Quem são os autovalores de D? Este operador é diagonalizável? Justifique sua resposta.

6. Considere $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno

   $$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

   (a) (1,0) Seja $W = [(0, 1, 1), (1, 1, 0)]$. Encontre uma base para $W^{\perp}$;

   (b) (1,0) Determine uma base ortonormal para W.

Código de Identificação do Candidato:

Estruturas Algébricas

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.2

1. Fixe $c \in \mathbb{R}$ positivo e considere $\mathrm{G} = \{x \in \mathbb{R} \mid -c < x < c\}$. Defina $a * b := \dfrac{a+b}{1+(ab)/c^2}$.
   (a) (1,0) Se $a, b \in \mathrm{G}$, então mostre que $a * b \in \mathrm{G}$.
   (b) (1,0) Mostre que $(\mathrm{G}, *)$ é um grupo abeliano.

2. Sejam $(G, *)$ um grupo finito e $\mathcal{S}_G := \{H \mid H$ é um subgrupo de $G\}$. Denote por $\#(\mathcal{S}_G)$ a cardinalidade de $\mathcal{S}_G$.
   (a) (0.5) Se $|G| = 6$, então determine $\#(\mathcal{S}_G)$.
   (b) (1,0) Se G é cíclico, então determine $\#(\mathcal{S}_G)$.
   (c) (0,5) Se $\#(\mathcal{S}_G) = 3$, pode-se concluir que G é cíclico? Justifique sua resposta!

3. (1,0) Seja G um grupo de ordem 99. Mostre que G é abeliano.

4. Considere o ideal* $\mathrm{I} = \langle x^2 - y^2, y - x^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$.
   (a) (0,5) Mostre que $x^2(1 - x^2) \in \mathrm{I}$.
   (b) (1,0) Mostre que $\langle x - 1, y - 1 \rangle$ é um ideal maximal do anel $\mathbb{C}[x, y]$ contendo I.
   (c) (0,5) I é um ideal radical?† Justifique sua resposta!

5. Considere o anel quociente $A = \dfrac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle xy \rangle}$ e $\varphi : \mathbb{Q}[t] \longrightarrow A$ o homomorfismo de anéis‡ definido por
   . $$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d \longmapsto \overline{a_0 + a_1\theta + \cdots + a_d\theta^d} \text{ sendo } \theta = x - y \in \mathbb{Q}[x, y].$$
   (a) (0,5) $q(t) = 1 + t + t^2$ pertence ao núcleo de φ? Justifique sua resposta!
   (b) (1,0) Determine o núcleo de φ.

6. Sejam A um anel comutativo com unidade e $A[t]$ o anel dos polinômios na variável t com coeficientes em A. Fixe $a \in A$ e defina $\mathrm{J}_a = \{p(t) \in A[t] \mid p(a) = 0, p'(a) = 0\}$.§
   (a) (0,5) Mostre que J_a é um ideal de $A[t]$.
   (b) (0,5) É J_a um ideal finitamente gerado de $A[t]$? Justifique sua resposta!
   (c) (0,5) Se $A = \mathbb{Z}$ e I é um ideal principal próprio e não nulo de $\mathbb{Z}[t]$, pode-se concluir que todo ideal $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$ é principal? Justifique sua resposta!

---

*Sendo $\langle x^2 - y^2, y - x^2 \rangle$ o ideal gerado por $x^2 - y^2$ e $y - x^2$ em $\mathbb{C}[x, y]$.

†Se $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo com unidade e $\mathrm{J} \subseteq A$ um ideal. Dizemos que J é radical se $\mathrm{J} = \sqrt{\mathrm{J}}$ sendo $\sqrt{\mathrm{J}} = \{a \in A \mid a^n \in \mathrm{J}$ para algum n inteiro positivo $\}$.

‡Se $(A, +, \cdot)$ e $(B, +_1, \cdot_1)$ forem anéis comutativos com unidades 1_A e 1_B. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é denominada homomorfismo de aneis se: $f(1_A) = 1_B$, $f(x + y) = f(x) +_1 f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot_1 f(y)$ para todo $x, y \in A$.

§$p'(t)$ indica a derivada de $p(t)$ em relação a t, isto é, $p'(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + d a_d t^{d-1}$ se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d$

Código de Identificação do Candidato:

Geometria Diferencial

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.2

1. (2,0) Seja $\alpha(t) = (acos(t/c), a\sin(t/c), bt/c)$, $t \in \mathbb{R}$ e $c^2 = a^2 + b^2$.

   (i) Mostre que α está parametrizada pelo comprimento de arco.

   (ii) Determine a curvatura de α.

   (iii) Calcule a torção de α.

2. (2.0) Suponha que todas as normais a uma curva parametrizada passem por um ponto fixo. Mostre que o traço da curva está contido em um círculo.

3. (2,0) Dizemos que um difeomorfismo $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ preserva área se a área de qualquer região $R \subset S$ é igual a área de $\varphi(R)$. Prove que se φ preserva áreas e é conforme, então φ é uma isometria.

4. (2,0) Calcule as curvaturas Gaussiana e média do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

5. Assinale certo ou errado nas afirmações abaixo justificando sua resposta.

(i) (0,5) Se uma superfície pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.

(ii) (0,5) Todo meridiano de uma superfície de rotação é uma geodésica.

(iii) (0,5) Se S não é homeomorfa a uma esfera, então S possui apenas pontos elípticos e hiperbólicos.

(iv) (0.5) As geodésicas da esfera são os grandes círculos.

Código de Identificação do Candidato:

Análise no $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.2

1. (1.0) Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^N$. Mostre que se A ou B é aberto, então o conjunto
$$A + B := \{a + b : a \in A \quad \text{e} \quad b \in B\}$$
é um aberto.

2. (2.0) Sejam $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e conexo e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$, mostre que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in A$. A mesma conclusão é verdadeira sem a hipótese de conexidade? Justifique sua resposta.

3. (1.5) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $N \times N$ simétrica e defina $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle Ax, x\rangle$. Mostre que existem $u \in S^{N-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $Au = \lambda u$, onde $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$.

4. (1.5) Enuncie o Teorema da Função Inversa. Demonstre o Teorema da Função Implícita usando o Teorema da Função Inversa.

5. (1.5) Considere $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $B[x_0, r]$ a bola fechada de centro x_0 e raio $r > 0$. Mostre que se $f : B[x_0, r] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então
$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\text{vol}(B[x_0, r])} \int_{B[x_0,r]} f(x)dx = f(x_0),$$
onde $\text{vol}(B[x_0, r])$ denota o volume da bola $B[x_0, r]$ em $\mathbb{R}^N$.

6. (1.5) Considere o sistema não-linear
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 11 \\ xyz = 6. \end{cases}$$
Note que o ponto $(1, 2, 3)$ é solução deste sistema. Mostre que esta solução é única em uma vizinhança deste ponto.

7. (1.0) Seja $B[x_0, R]$ a bola fechada de centro x_0 e raio $R > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Mostre que
$$\text{vol}(B[x_0, R]) = \text{vol}(B[0, 1]).R^N$$

Código de Identificação do Candidato:

Análise na Reta

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2024.2

1. **(1,5)**

   a) Prove (por indução) a *Desigualdade de Bernoulli*: para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$ vale $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

   b) Sendo $0 < a < 1$, mostre que a correspondência $n \mapsto a^n$ define uma sequência decrescente e limitada.

   c) Mostre que $\inf\{a^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$. (Dica: como $\dfrac{1}{a} > 1$, tem-se $\dfrac{1}{a} = 1 + d$, com $d > 0$. Daí use a))

2. **(2,0)** Sejam $(a_n), (b_n)$ e (x_n) sequências tais que $\lim a_n = 0$, (b_n) é limitada e existe uma constante $C > 0$ tal que $|x_n - x| \leq C a_n b_n$ para todo n suficientemente grande. Daí:

   a) Prove que $\lim a_n b_n = 0$.

   b) Usando a), mostre que $\lim x_n = x$.

3. **(1,5)** Mostre que se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

4. **(1,5)** Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um subconjunto $F \subset A \times B$ é *fechado* em $A \times B$ se para toda sequência (x_n, y_n) em F com $\lim x_n = a \in A$ e $\lim y_n = b \in B$ tem-se $(a, b) \in F$. Mostre que se $f : A \to B$ é contínua, então o conjunto $G_f = \{(x, f(x));\, x \in A\}$ (ou seja, o gráfico de f) é fechado em $A \times B$.

5. **(1,5)** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I, com f' contínua em $a \in I$. Mostre que para quaisquer sequências de pontos $x_n \neq y_n$ em I, com $\lim x_n = a = \lim y_n$, tem-se

$$f'(a) = \lim \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}.$$

   (Dica: use o Teorema do Valor Médio de Lagrange)

6. **(2,0)** Considere $f, g : (0, 8] \to \mathbb{R}$ funções. Justifique as afirmações abaixo:

   a) Se f é dada por $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = 1$, se $x \notin \mathbb{Q}$, então f **não é integrável**.

   b) Se g é dada por $g(x) = x$, se $x \notin \mathbb{N}$, e $g(x) = \dfrac{1}{2x}$, se $x \in \mathbb{N}$, então g **é integrável**.