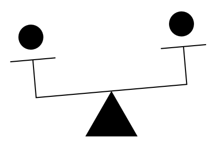
Nível 3 - Problemas e Soluções

1. (20 pontos) Raphael possui 16 pedras de pesos distintos entre si e uma balança de dois pratos onde ele pode comparar duas pedras quaisquer, colocando uma em cada prato e descobrir qual é a mais pesada, em um processo chamado pesagem. Este é o único meio que Raphael pode utilizar para comparar os pesos de duas pedras.
   (a) Descreva um procedimento para encontrar a pedra mais leve em 15 pesagens.
   (b) Qual é o número mínimo de pesagens necessário para garantir que Raphael encontrará as duas pedras mais pesadas?



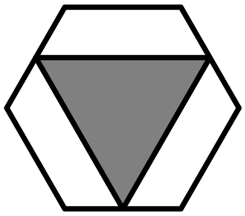
Solução:

(a) Vamos dividir as 16 peças em oito pares e efetuar pesagens entre os pares formados. Realizadas as 8 pesagens, descartamos as pedras mais **pesadas** e formamos quatro pares com as oito pedras restantes. Realizando mais quatro pesagens entre os pares, tomamos as quatro pedras mais leves em pares e efetuamos mais duas pesagens, deixando de fora as pedras mais pesadas. Finalmente, tendo as duas pedras mais leves em mãos, efetuamos uma última pesagem para determinar a pedra mais leve. Este procedimento tem $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ pesagens e garante que a pedra encontrada é a mais leve.

(b) Podemos utilizar um procedimento análogo ao item anterior para encontrar a pedra mais pesada. Como podemos encontrar a segunda pedra mais pesada entre as 15 restantes otimizando o processo? A resposta é engenhosa: ao efetuar as quinze pesagens iniciais, nós descartamos todas as pedras perdedoras, **exceto as pedras dos pares onde estavam a pedra mais pesada** (a importância dessa exceção é oriunda da possibilidade de termos comparado as duas pedras mais pesadas em uma etapa anterior. Deste modo, garantimos que a segunda pedra mais pesada estará entre as quatro pedras restantes). Com as quatro pedras restantes, são necessárias três pesagens para obter a pedra mais pesada do grupo, isto é, a segunda pedra entre as pedras iniciais. Assim, identificamos a segunda pedra mais pesada, em um procedimento que leva um total de $15 + 3 = 18$ pesagens.

Adaptação da solução de Maria Clara Macedo Porto.

2. (20 pontos) Em uma folha de papel, Luiz desenhou um hexágono regular de 10 cm de lado e saiu para lanchar. Enquanto isso, seu amigo Gonzaga desenhou um triângulo equilátero cujos vértices são pontos médios de lados do hexágono e pintou seu interior de cinza, como mostra a figura a seguir:

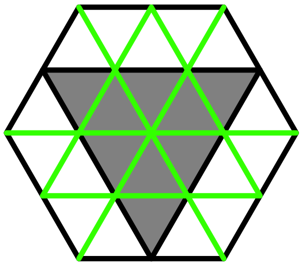


(a) Qual é o perímetro do triângulo?

(b) A área do triângulo cinza corresponde a que fração da área total do hexágono?

Solução:

Para deixar a resolução mais prática, vamos traçar as linhas auxiliares como na figura abaixo:



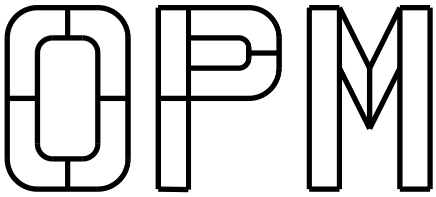
Perceba que o hexágono é dividido em triângulos menores, todos com áreas iguais e lados com mesma medida. Como cada lado do hexágono corresponde a dois lados dos triângulos menores, a medida do lado de cada triângulo menor é 5 cm.

(a) Como o lado do triângulo cinza corresponde a três lados do triângulo menor, cada lado do triângulo maior mede $3 \times 5 = 15$ cm. Portanto, o perímetro do triângulo é 45 cm.

(b) Seja A a área de um triângulo menor. Note que o hexágono é totalmente "coberto" com 24 triângulos menores (ou $24A$), enquanto o triângulo cinza é totalmente "coberto" por 9 triângulos menores (ou $9A$). Deste modo, a fração que temos que encontrar é

$$\frac{\text{área do triângulo cinza}}{\text{área do hexágono}} = \frac{9A}{24A} = \frac{3}{8}.$$

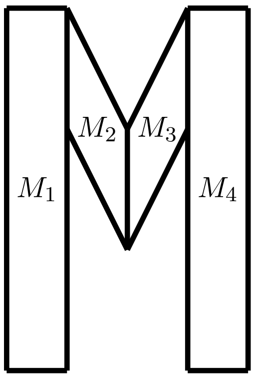
3. (20 pontos) Joémerson quer pintar as letras da palavra OPM, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores entre branco, cinza ou preto e que regiões vizinhas, ou seja, que possuem uma linha em comum, tenham cores distintas.



(a) De quantas maneiras ele pode pintar a letra M?
(b) De quantas maneiras ele pode pintar a letra P?
(c) De quantas maneiras ele pode pintar a letra O?

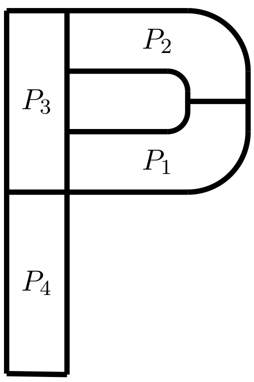
Solução:

(a) Sejam M_1, M_2, M_3, M_4 as regiões da letra M, como na figura a seguir:



Começando pela região M_1, Joémerson tem 3 opções de cores: branca, preta ou cinza. Logo, ele pode pintar a região M_1 de 3 maneiras diferentes. A região M_2 é vizinha à região M_1, então a região M_2 deve ser pintada com uma cor diferente da região M_1. Assim, haverá 2 maneiras de pintar a região M_2 (qualquer cor, menos a que foi usada em M_1). A região M_3 é vizinha à região M_2, então a região M_3 deve ser pintada com uma cor diferente da região M_2, ou seja, Joémerson pode pintar a região M_3 de 2 maneiras. Por fim, a região M_4 é vizinha à região M_3, assim a região M_4 pode ser pintada de 2 maneiras, pois deve ser pintada com uma cor diferente da que foi usada em M_3. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, Joémerson pode pintar a letra M de $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ maneiras.

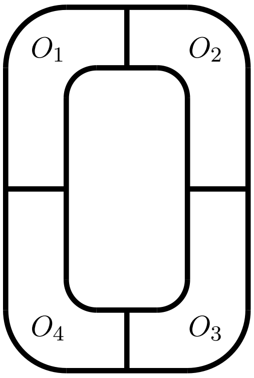
(b) Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 as regiões da letra P, como na figura a seguir:



Começando pela região P_1, Joémerson tem 3 opções de cores para pintar esta região. A região P_2 deve ser pintada com uma cor diferente da região P_1, então a região P_2 pode ser pintada de 2 maneiras.

A região P_3 deve ser pintada com uma cor diferente das que foram utilizadas para pintar P_1 e P_2 (**importante observar isso: as regiões P_1 e P_2 são pintadas com cores diferentes**), logo Joémerson pode pintar a região P_3 de 1 maneira. E a região P_4 só é vizinha à região P_3, assim a única restrição para pintar P_4 é que a cor utilizada para isto deve ser diferente da cor que foi utilizada para pintar P_3. Desta forma, Joémerson pode pintar a região P_4 de 2 maneiras. Pelo Princípio Multiplicativo, concluímos que ele pode pintar a letra P de $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ maneiras.

(c) Sejam O_1, O_2, O_3, O_4 as regiões da letra O, como na figura a seguir:



Começando pela região O_1, Joémerson pode pintá-la de 3 maneiras. A região O_2 deve ser pintada com uma cor diferente da que foi utilizada para pintar O_1, então a região O_2 pode ser pintada de 2 maneiras. Da mesma forma, temos que a região O_3 pode ser pintada de 2 maneiras, pois ela é vizinha à região O_2. Entretanto, chegamos a um impasse na hora de determinar de quantas maneiras pode ser pintada a região O_4. Se as regiões O_1 e O_3 foram pintadas com a mesma cor, há 2 maneiras de pintar a região O_4 (com uma cor diferente da que foi utilizada para pintar O_1 e O_3); se as regiões O_1 e O_3 foram pintadas com cores diferentes, há apenas uma cor que pode ser utilizada para pintar a região O_4. Então precisamos contar cada caso separadamente:

- Se Joémerson pintar as regiões O_1 e O_3 com a mesma cor, temos 3 possibilidades para a cor utilizada, e cada uma das regiões O_2 e O_4 poderá ser pintada de 2 maneiras, pois O_2 é vizinha a O_1 e O_3, as quais possuem a mesma cor, e o mesmo acontece com O_4. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, Joémerson pode pintar a letra O de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras.
- Se Joémerson pintar as regiões O_1 e O_3 com cores diferentes, temos $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de pintar estas duas regiões. A região O_2 é vizinha às regiões O_1 e O_3, que possuem cores diferentes, logo a região O_2 pode ser pintada de 1 maneira. Da mesma forma, observamos que a região O_4 pode ser pintada de 1 maneira. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, Joémerson pode pintar a letra O de $6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ maneiras.

Pelo Princípio Aditivo, concluímos que Joémerson pode pintar a letra O de $12 + 6 = 18$ maneiras.

4. (20 pontos) Um número é chamado *quatrocincástico* quando pode ser escrito tanto como a soma de quatro naturais consecutivos quanto como a soma de cinco naturais consecutivos. Um exemplo de número *quatrocincástico* é o 50, pois $50 = 11+12+13+14$ e $50 = 8+9+10+11+12$. Quantos números *quatrocincásticos* menores que 2019 existem?

Solução:

Se um número natural k é *quatrocincástico*, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que:

$$k = m + (m+1) + (m+2) + (m+3) = 4m + 6 = 4(m+1) + 2 \tag{1}$$

$$k = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2) \tag{2}$$

Da equação 1, vemos que todo número *quatrocincástico* é par e deixa resto 2 quando dividido por 4, enquanto a equação 2 nos mostra que todo número *quatrocincástico* é múltiplo de 5. Portanto, todo número *quatrocincástico* é múltiplo de 10, mas não múltiplo de 20, logo

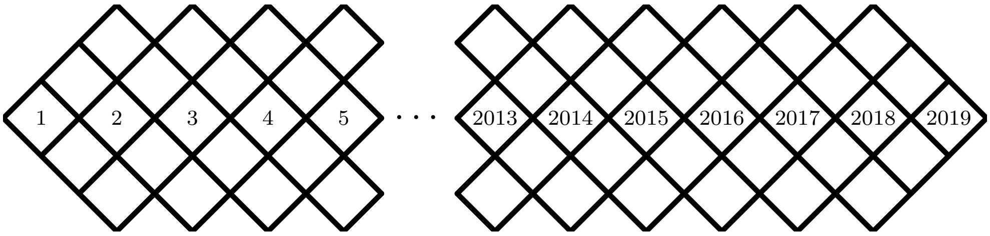
$$k = 10 + 20p, \ \ p \in \mathbb{N} \tag{3}$$

O valor p da equação 3 **precisa** ser positivo, pois 10 não é *quatrocincástico.* Assim, temos que os primeiros números *quatrocincásticos* são 30, 50, 90, 110 etc. E o último número *quatrocincástico* é 2010.

Para calcular a quantidade de elementos de um conjunto (no nosso caso, uma PA de razão 20 onde o primeiro termo é 30 e o último termo é 2010) efetuamos $\dfrac{2010-30}{20} + 1$, cuja resposta é 100. Portanto, existem 100 números *quatrocincásticos* menores que 2019.

Nota da Equipe Organizadora: Na solução foi considerado que 1 é o menor número natural. Estudantes que definiram 0 como sendo o primeiro número natural e chegaram corretamente à solução de 101 números quatrocincásticos por raciocínio análogo ao apresentado acima terão pontuação integral. A Equipe OPM pede desculpas pela ambiguidade gerada ao utilizar a terminologia *números naturais* em vez de *números inteiros positivos*, como era o desejado.

5. (20 pontos) Rodrigo e Rita disputam um jogo no tabuleiro abaixo

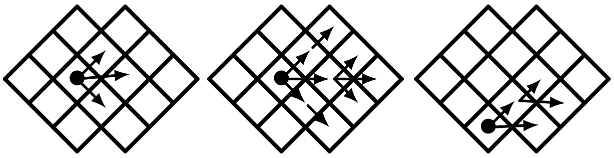


com as seguintes regras:

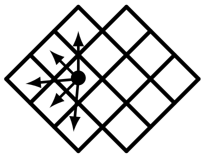
(i) O jogo inicia com um círculo na casa indicada com o número 1 (partida);

(ii) Cada jogador pode avançar a peça até, no máximo, duas casas consecutivas, nunca podendo retroceder.

Exemplos de jogadas permitidas:



As jogadas proibidas são:



(iii) Vence o jogador que colocar a peça na casa indicada com o número 2019 (chegada).

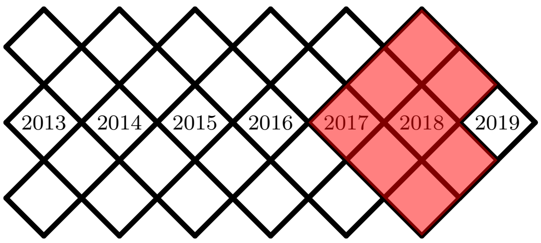
Se Rodrigo começa o jogo, descreva uma **estratégia vencedora** para que ele sempre vença, isto é, uma estratégia que pode ser aplicada **independentemente** das jogadas de Rita.

Solução:

Precisamos pensar no problema de trás pra frente:

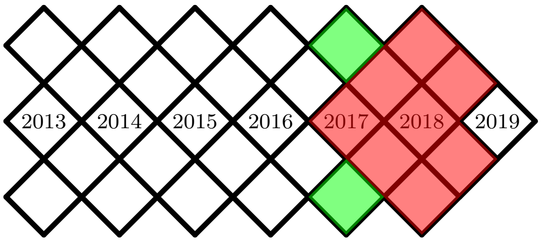
Ganha aquele que deixar o disco na casa com 2019. Então o vencedor é aquele que encontrar o disco em, até duas casas de distâncias da casa 2019.

- Só é possível chegar na casa 2019 com dois movimentos a partir das casas destacadas de vermelho abaixo:



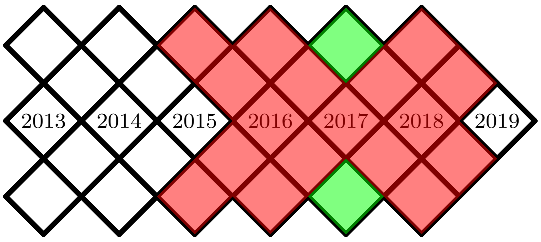
  Diremos então que estas casas em vermelho são **POSIÇÕES PERDEDORAS**, pois aquele que deixar o disco em uma destas casas, perde!

- Portanto, se Rodrigo obrigar Rita a deixar o disco numa **posição perdedora** ele ganha o jogo. Uma maneira de obrigar seu adversário a jogar na região vermelha é deixando o disco em uma das casas verdes abaixo:

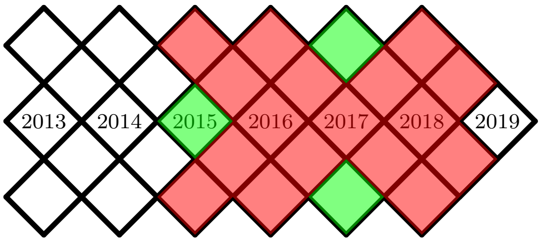


Diremos então as casas em verde são **POSIÇÕES VENCEDORAS**, pois se Rodrigo deixar o disco nestas casas, vence!

- Mas para Rodrigo poder deixar o disco em uma das casas verdes, é suficiente que Rita deixe o disco na nova região vermelha abaixo, gerando mais **posições perdedoras**.

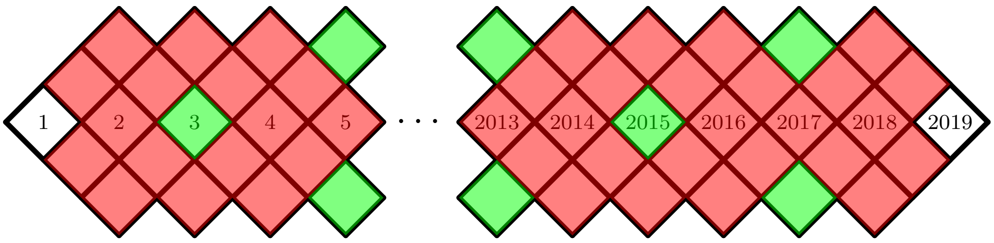


- A única maneira de Rodrigo obrigar Rita a deixar o disco em uma **posição perdedora**, é suficiente que Rodrigo deixe o disco na **região vencedora** abaixo:



Isto mostra que: **Se Rodrigo deixar o disco na posição vencedora 2015, ele vence o jogo.** Então Rodrigo pode procurar uma estratégia para chegar a casa 2015.

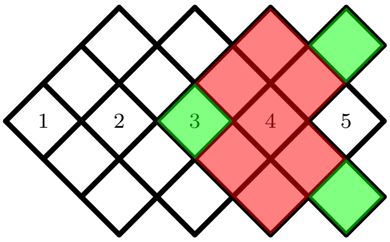
1. Seguindo a análise feita acima, vemos que surge um padrão e obtemos então a seguinte configuração de posições vencedoras e perdedoras:



Note que, estando o disco em uma posição perdedora, é sempre possível chegar a uma posição vencedora na próxima jogada. Enquanto que, estando em uma posição vencedora, não é possível chegar a próxima possição vencedora na próxima jogada. Desta maneira, Rodrigo começa jogando na casa 3 e segue sempre pela posição vencedora mais próxima que ele puder ir.

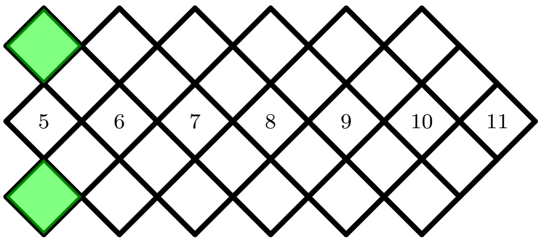
Para uma explicação mais detalhada ainda, veja o raciocínio abaixo.

- Rodrigo leva o disco para a casa 3 (que é uma posição vencedora). Daí, temos dois casos a analisar:
  - Rita joga numa casa diferente da 5, ou seja, na região vermelha abaixo:



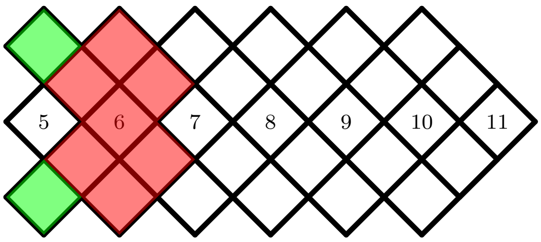
    Então Rodrigo leva o disco para uma das casas verdes acima ou abaixo da casa 5.
  - Rita leva o disco para a casa 5:
    Neste caso, Rodrigo segue para a casa 7, que é uma posição vencedora.

Uma outra situação a analisar é se Rodrigo deixar o disco numa posição vencedora que não está no centro do tabuleiro, por exemplo:



Temos também dois casos analisar:

- Rita deixa o disco na posição perdedora abaixo:



  Então Rodrigo leva o disco para a posição vencedora 7;

- Rita joga o disco na posição perdedora acima ou abaixo do 7.
  Então Rodrigo leva o disco para a posição vencedora acima ou abaixo do 9.

Todas as outras situações são repetições destas descritas acima.

Portanto, o primeiro jogador tem a estratégia vencedora, sendo a estratágia descrita acima.