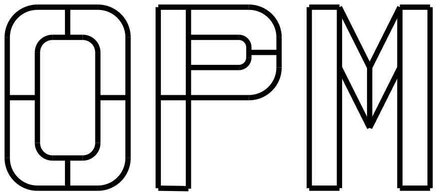
Nível 2 - Problemas e Soluções

1. (20 pontos) Hindrilainy quer pintar as letras da palavra OPM, como na figura ao lado, de modo que cada região seja pintada com uma das cores entre branco, cinza ou preto e que regiões vizinhas, ou seja, que possuem uma linha em comum, tenham cores distintas.



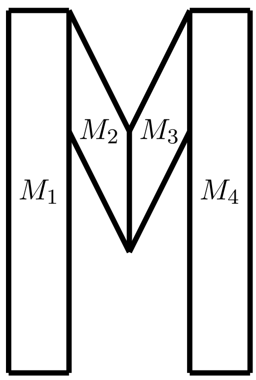
   (a) De quantas maneiras ela pode pintar a letra M?

   (b) De quantas maneiras ela pode pintar a letra P?

   (c) De quantas maneiras ela pode pintar a letra O?

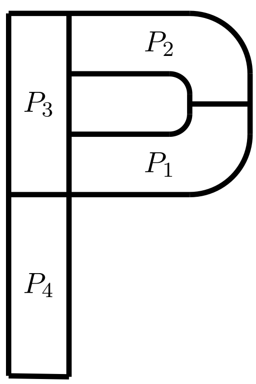
Solução:

(a) Sejam M_1, M_2, M_3, M_4 as regiões da letra M, como na figura a seguir:



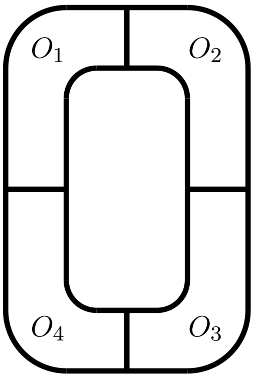
Começando pela região M_1, Hindrilainy tem 3 opções de cores: branca, preta ou cinza. Logo, ela pode pintar a região M_1 de 3 maneiras diferentes. A região M_2 é vizinha à região M_1, então a região M_2 deve ser pintada com uma cor diferente da região M_1. Assim, haverá 2 maneiras de pintar a região M_2 (qualquer cor, menos a que foi usada em M_1). A região M_3 é vizinha à região M_2, então a região M_3 deve ser pintada com uma cor diferente da região M_2, ou seja, Hindrilainy pode pintar a região M_3 de 2 maneiras. Por fim, a região M_4 é vizinha à região M_3, assim a região M_4 pode ser pintada de 2 maneiras, pois deve ser pintada com uma cor diferente da que foi usada em M_3. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, Hindrilainy pode pintar a letra M de $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ maneiras.

(b) Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 as regiões da letra P, como na figura a seguir:



Começando pela região P_1, Hindrilainy tem 3 opções de cores para pintar esta região. A região P_2 deve ser pintada com uma cor diferente da região P_1, então a região P_2 pode ser pintada de 2 maneiras. A região P_3 deve ser pintada com uma cor diferente das que foram utilizadas para pintar P_1 e P_2 (**importante observar isso: as regiões P_1 e P_2 são pintadas com cores diferentes**), logo Hindrilainy pode pintar a região P_3 de 1 maneira. E a região P_4 só é vizinha à região P_3, assim a única restrição para pintar P_4 é que a cor utilizada para isto deve ser diferente da cor que foi utilizada para pintar P_3. Desta forma, Hindrilainy pode pintar a região P_4 de 2 maneiras. Pelo Princípio Multiplicativo, concluímos que ela pode pintar a letra P de $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ maneiras.

(c) Sejam O_1, O_2, O_3, O_4 as regiões da letra O, como na figura a seguir:



Começando pela região O_1, Hindrilainy pode pintá-la de 3 maneiras. A região O_2 deve ser pintada com uma cor diferente da que foi utilizada para pintar O_1, então a região O_2 pode ser pintada de 2 maneiras. Da mesma forma, temos que a região O_3 pode ser pintada de 2 maneiras, pois ela é vizinha à região O_2. Entretanto, chegamos a um impasse na hora de determinar de quantas maneiras pode ser pintada a região O_4. Se as regiões O_1 e O_3 foram pintadas com a mesma cor, há 2 maneiras de pintar a região O_4 (com uma cor diferente da que foi utilizada para pintar O_1 e O_3); se as regiões O_1 e O_3 foram pintadas com cores diferentes, há apenas uma cor que pode ser utilizada para pintar a região O_4. Então precisamos contar cada caso separadamente:

- Se Hindrilainy pintar as regiões O_1 e O_3 com a mesma cor, temos 3 possibilidades para a cor utilizada, e cada uma das regiões O_2 e O_4 poderá ser pintada de 2 maneiras, pois O_2 é vizinha a O_1 e O_3, as quais possuem a mesma cor, e o mesmo acontece com O_4. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, Hindrilainy pode pintar a letra O de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras.
- Se Hindrilainy pintar as regiões O_1 e O_3 com cores diferentes, temos $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de pintar estas duas regiões. A região O_2 é vizinha às regiões O_1 e O_3, que possuem cores diferentes, logo a região O_2 pode ser pintada de 1 maneira. Da mesma forma, observamos que a região O_4 pode ser pintada de 1 maneira. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, Hindrilainy pode pintar a letra O de $6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ maneiras.

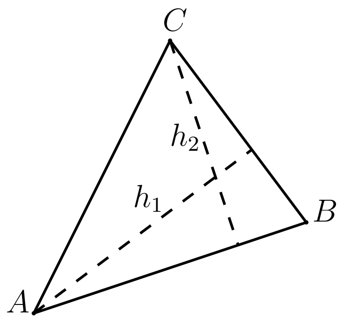
Pelo Princípio Aditivo, concluímos que Hindrilainy pode pintar a letra O de $12 + 6 = 18$ maneiras.

2. (20 pontos) Igor e Maria estão praticando a seguinte fórmula para a área do triângulo ABC:

$$\text{área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Acontece que ambos cometeram pequenos erros e chegaram a valores diferentes! Veja o que aconteceu:

- Igor usou como referência a base $\overline{AB}$ e a altura h_1 referente ao vértice A, obtendo 10 unidades de área;
- Já Maria usou como referência a base $\overline{BC}$ e a altura h_2 referente ao vértice C, encontrando o total de 40 unidades de área;



Na figura ao lado, o segmento h_1 representa a altura relativa ao vértice A e o segmento h_2 representa a altura relativa ao vértice C.

(a) Qual foi o erro cometido por Igor? E Maria, qual foi o erro dela?

(b) Qual é o valor da área do triângulo ABC? **Dê a resposta em unidades de área.**

Solução:

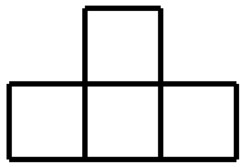
(a) Igor calculou o produto $\dfrac{\overline{AB} \times h_1}{2} = 10$ quando, na verdade, deveria calcular $\dfrac{\overline{AB} \times h_2}{2}$ para obter a área do triângulo ABC. Já Maria calculou o produto $\dfrac{\overline{BC} \times h_2}{2} = 40$ em vez de calcular $\dfrac{\overline{BC} \times h_1}{2}$ para obter a área do mesmo triângulo.

(b) Seja A a área do triângulo ABC. Sabemos que $A = \dfrac{\overline{AB} \times h_1}{2} = \dfrac{\overline{BC} \times h_2}{2}$. Multiplicando os produtos de Igor e Maria e organizando os fatores temos:

$$10 \times 40 = \overbrace{\frac{\overline{AB} \times h_1}{2}}^{\text{Produto de Igor}} \times \overbrace{\frac{\overline{BC} \times h_2}{2}}^{\text{Produto de Maria}} \implies 400 = \overbrace{\frac{\overline{AB} \times h_2}{2}}^{A} \times \overbrace{\frac{\overline{BC} \times h_1}{2}}^{A} = A^2$$

Como A é um valor de área, segue-se que A é a raiz positiva de 400. Portanto, a área do triângulo ABC é 20 unidades de área.

3. (20 pontos) Grazielle possui *tetraminós* no formato ao lado e deseja, com eles, cobrir um tabuleiro de dimensões 10×10, de modo que cada *tetraminó* consegue cobrir exatamente quatro casas. É possível cobrir inteiramente o tabuleiro sem sobreposição de peças?



Dica: considere que cada casa do tabuleiro é pintada de preto ou de branco e que casas com arestas em comum possuem cores distintas, como em um tabuleiro de xadrez.

Solução:

A dica é uma importante aliada na resolução deste problema. Se casas vizinhas possuem cores distintas, um *tetraminó* cobrirá 3 casas pretas e 1 casa branca (chamemos de Tipo 1) ou 3 casas brancas e uma casa preta (chamemos de Tipo 2), como podemos ver abaixo:

Um tabuleiro 10×10 tem 100 casas, sendo 50 casas brancas e 50 casas pretas. Como cada *tetraminó* ocupa quatro casas, são necessários 25 *tetraminós* para cobrir o tabuleiro. Seja a a quantidade de *tetraminós* do tipo 1 – que cobrem $3a$ casas pretas – e b a quantidade de *tetraminós* do tipo 2 – que cobrem b casas pretas. Se for possível cobrir o tabuleiro, o sistema a seguir possui solução inteira:

$$\begin{cases} a + b = 25 \\ 3a + b = 50 \end{cases}$$

A solução do sistema, porém, é $a = b = 12,5$ *tetraminós*, o que é um absurdo. Portanto, é impossível cobrir um tabuleiro 10×10 com *tetraminós*.

4. (20 pontos) Uma subtração é chamada *decimal completa* quando obedece às seguintes condições:

(i) São escritos dois números com cinco algarismos cada - nenhum deles pode começar por 0;

(ii) Todos os dez algarismos escritos são distintos entre si, ou seja, cada número de 0 a 9 é escrito uma única vez;

(iii) O resultado da subtração é um número positivo (sempre se subtrai o menor do maior).

Um exemplo de subtração decimal completa é:

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & 2 & 3 & 9 & 0 \\ - & 4 & 8 & 1 & 6 & 5 \\ \hline & 2 & 4 & 2 & 2 & 5 \end{array}$$

(a) Qual é a **maior** diferença que podemos obter em uma subtração decimal completa?

(b) Qual é a **menor** diferença que podemos obter em uma subtração decimal completa?

(c) Quantas subtrações decimais completas existem?

Solução:

(a) Para obter a maior diferença possível, devemos encontrar o maior e o menor números que podemos escrever. O maior número é 98765 (os maiores dígitos em ordem decrescente), enquanto o menor número possível é 10234 (lembrando que nenhum número pode começar com zero). Sendo assim, a maior diferença é:

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ - & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 8 & 8 & 5 & 3 & 1 \end{array}$$

Portanto, a maior diferença possível é 88531.

(b) Para obter a menor diferença possível, que deve ser positiva, procedemos da seguinte maneira: O primeiro número será iniciado por 5 e será seguido pelos menores dígitos em ordem crescente, enquanto o segundo número será iniciado por 4 e seguido pelos maiores dígitos em ordem decrescente. Assim,

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ - & 4 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ \hline & & & 2 & 4 & 7 \end{array}$$

Portanto, a menor diferença possível é 247.

(c) Consideremos uma subtração decimal completa genérica da forma a seguir:

$$\begin{array}{cccccc} & m & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ - & n & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \\ \hline \end{array}$$

É necessário e suficiente que $m > n$ para ter uma subtração decimal completa, com $n \neq 0$. Usando o Princípio Multiplicativo, temos $9 \times 8 = 72$ maneiras de escolher pares (m, n). Como $n > m$ em metade desses pares, então temos 36 formas de escolher m e n para a subtração decimal completa. Os demais dígitos, de d_1 a d_8, podem ser preenchidos de $8! = 40320$ maneiras com os dígitos restantes. Portanto, existem $36 \times 8! = 1451520$ subtrações decimais completas.

5. (20 pontos) Wolenberg chegou, por acidente, ao planeta *Saturnino*, que possui duas raças de habitantes: os *mâfi* e os *mêfi*, que são visualmente indistinguíveis. O guru **Mâmêfi**, ancestral de todos os habitantes e o ser mais sábio e sincero daquele planeta, lhe dá as boas-vindas e diz as seguintes informações:

   - Os *mâfi* sempre falam a verdade, os *mêfi* sempre mentem;
   - Há apenas dois portais de saída deste planeta: o Portal da Terra, que lhe levará de volta para casa, e o Portal da Perdição, que leva a um lugar que, bem, é melhor nem mencionar...;
   - Cada portal é protegido por um guardião, sendo que um deles é *mâfi* e o outro é *mêfi*;
   - Você tem uma chance de fazer uma única pergunta a um dos guardiões, mas a pergunta deve ser formulada de modo que, na resposta, **o guardião aponte para um dos portais**, mas você pode entrar em qualquer portal...

   A conversa foi interrompida por uma discussão entre os dois guardiões (vamos chamá-los de Guardião do Portal 1 e de Guardião do Portal 2, já que é impossível distingui-los):

   - **Guardião do Portal 1:** Eu sou o guardião do Portal da Terra!
   - **Guardião do Portal 2:** Você mente, eu sou o guardião do Portal da Terra!
   - **Guardião do Portal 1:** Se eu trocasse de raça com você, eu diria que NÃO SOU o guardião do Portal da Terra!
   - **Guardião do Portal 2:** E se eu trocasse de raça com você, eu diria que NÃO SOU o guardião do Portal da Terra!

   Após a discussão, **Mâmêfi** desapareceu.

   Como Wolenberg pode voltar para a Terra são e salvo fazendo apenas uma pergunta a um dos guardiões?

Solução:

Analisando logicamente as afirmações dos dois guardiões, temos as duas sentenças, equivalentes às falas dos guardiões, a seguir:

1. Eu sou o guardião do Portal da Terra;
2. Se eu fosse você, eu diria que não sou o guardião do Portal da Terra;

A sentença 1 é dita por ambos os guardas, logo o guardião do Portal da Terra é um **mâfi**. Mas não é suficiente para Wolenberg perguntar diretamente "Qual é o Portal da Terra?", pois ambos apontariam para seus próprios portais.

Aqui entra a sentença 2. Note que o **mâfi** fala a verdade ao dizer "**se eu fosse mêfi, eu diria que não sou o guardião do Portal da Terra**", enquanto o **mêfi** MENTE ao dizer "**se eu fosse mâfi, eu diria que não sou o guardião do Portal da Terra**", pois o mêfi, ao se passar por mâfi, deveria falar a verdade e dizer que é o guardião do Portal da Terra, porém ele sempre mente. Ou seja, os dois guardiões apontam para um mesmo portal se, na pergunta formulada, um deles precisar "se passar" pelo outro, em termos de raça e de portal guardado.

Tendo conhecimento desse fato, Wolenberg poderia formular a seguinte pergunta, a qualquer um dos guardiões: "SE VOCÊ PERTENCESSE À RAÇA DO OUTRO GUARDIÃO, PARA QUAL PORTAL VOCÊ APONTARIA SE EU PERGUNTASSE QUAL É O PORTAL DA TERRA?". Esta pergunta tem duas consequências:

- Se a pergunta for feita ao **mâfi**, ele agiria como **mêfi** e mentiria, apontando para o Portal da Perdição;

- Se a pergunta for feita ao **mêfi**, ele deveria agir como **mâfi** e apontar para o Portal da Terra. Porém, como ele é um **mêfi**, ele mentiria na sua resposta, apontando, também, para o Portal da Perdição.

Sendo assim, basta Wolenberg escolher o portal que não foi apontado pelo guardião!

Respostas onde a pergunta proposta foi distinta, mas os trechos sublinhados foram clara e corretamente mencionados, direta ou implicitamente, obtiveram pontuação total. Há exemplos de soluções corretas em que Wolenberg se dirige ao portal apontado pelo guardião – tente descobrir uma delas!