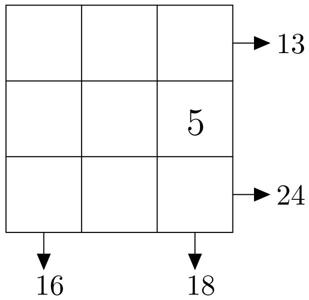
Nível 1 - Problemas e Soluções

1. (20 pontos) Complete o quadrado ao lado com os números restantes de 1 a 9, sem repetição, de modo que a soma dos dígitos das linhas e das colunas sejam iguais aos valores indicados.



Solução:

Inicialmente, notemos que $1+2+3+\cdots+8+9=45$, portanto a soma de todas as linhas é 45, assim como a soma de todas as colunas. Assim podemos determinar a soma da linha intermediária, que é 8, e da coluna intermediária, que é 11.

Na terceira linha, cujos números somam 24, teremos, obrigatoriamente, os números 7, 8 e 9. Analisando agora a primeira linha, podemos escrever $13 = 2+5+6$ (inválida, pois o 5 está na segunda linha) e $13 = 3+4+6$, o que implica que o 6 está na primeira linha. Analogamente, na segunda linha temos $8 = 1+3+4$ (inválida, pois o 5 está nesta linha) e $8 = 1+2+5$, o que implica que o 1 está na segunda linha, assim como o 2.

Voltemos nossas atenções para a soma da terceira coluna, que deve dar 18. É impossível que o 3 pertença à terceira coluna, pois $18 = 3+5+10$ é impossível, tendo 4 e 6 como possibilidades restantes. Também o 3 não pode estar na primeira coluna, pois $16 = 3+1+12$ ou $16 = 3+2+11$, que são impossíveis. Logo o 3 está na segunda coluna. Se o 6 pertencer a esta coluna, é forçado que o 7 esteja na terceira coluna. Tal informação força, também, a posição do 9 (terceira linha, primeira coluna) e do 8 (terceira linha, segunda coluna). Se o número da primeira coluna da segunda linha for 1, deveríamos ter $16 = 9+1+6$, o que é impossível. A outra possibilidade é o 2, mas $16 = 9+2+5$, o que também é impossível. Logo, o elemento da terceira coluna da primeira linha deve ser 4, o que força a posição dos demais números.

		5

	3	
		5

4	3	6
?	?	5
9	8	7

6	3	4
2	1	5
8	7	9

2. (20 pontos) Cássio, France, Jaynara e João Lucas ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jambos e a instrução para que os frutos fossem divididos igualmente entre eles. Cássio acordou primeiro, pegou $\frac{1}{4}$ dos jambos e saiu. France acordou depois, mas pensou que era o primeiro a acordar e, por isso, pegou $\frac{1}{4}$ dos jambos que restavam na vasilha e saiu. Jaynara e João Lucas acordaram juntos, perceberam que Cássio e France já haviam saído e dividiram igualmente os jambos restantes. Todos ficaram com quantidades inteiras de jambos.

(a) Que fração do total de jambos ficou com France?

(b) Quem ficou com a menor quantidade de jambos? E quem ficou com a maior quantidade?

(c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 10 jambos. Qual a quantidade total de jambos que havia inicialmente na vasilha?

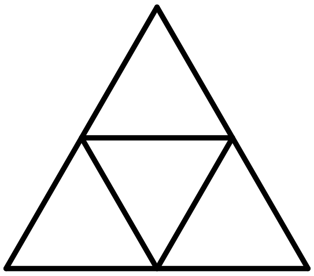
Solução:

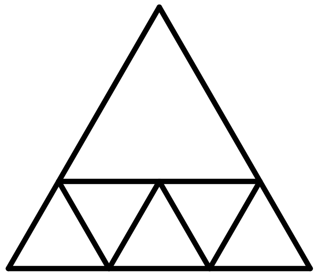
(a) Após Cássio retirar seus jambos, France retirou $\frac{1}{4}$ dos $\frac{3}{4}$ dos jambos restantes. Sendo assim, a fração de jambos que lhe corresponde é $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

(b) Analisando as frações de jambos que cada um dos irmãos ficou, Cássio ficou com $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ do total, France ficou com $\frac{3}{16}$ e os outros dois irmãos dividiram igualmente os $\frac{16-4-3}{16} = \frac{9}{16}$ jambos restantes, isto é, cada um ficou com $\frac{9}{32}$ do total de jambos. Como $\frac{9}{32} > \frac{8}{32} = \frac{4}{16} > \frac{3}{16}$, concluímos que France ficou com a menor quantidade de jambos, enquanto Jaynara e João Lucas ficaram com as maiores quantidades.

(c) Para que as quantidades de jambos de cada irmão sejam inteiras, o número de jambos deve ser múltiplo de 32, pois é o maior denominador de uma fração irredutível da divisão de jambos. Como nenhum dos irmãos ficou com mais do que 10 jambos, concluímos que o número de jambos que haviam inicialmente na vasilha é 32, dos quais 8 ficaram com Cássio, 6 ficaram com France, 9 ficaram com Jaynara e 9 ficaram com João Lucas.

3. (20 pontos) Um triângulo equilátero pode ser dividido em triângulos equiláteros menores (iguais ou não). As figuras a seguir mostram possíveis maneiras de dividi-lo em 4 e em 6 triângulos equiláteros.





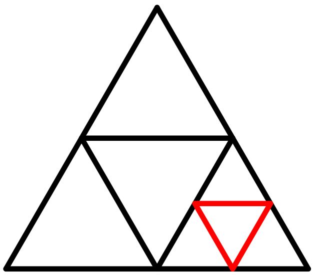
(a) Apresente uma maneira de dividir um triângulo equilátero em 7 triângulos equiláteros menores.

(b) Apresente uma maneira de dividir um triângulo equilátero em 8 triângulos equiláteros menores.

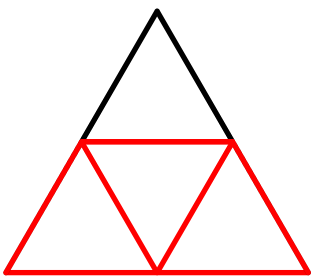
(c) Mostre como podemos dividir um triângulo equilátero em 20 triângulos equiláteros menores.

Solução:

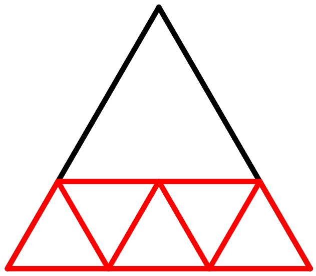
(a) Podemos começar dividindo o triângulo equilátero em 4 triângulos equiláteros, como na figura apresentada no enunciado, e depois dividir um desses 4 triângulos equiláteros em outros 4 triângulos equiláteros, como na figura a seguir:



(b) Traçando os segmentos que ligam os pontos médios dos lados do triângulo equilátero da esquerda (no enunciado), damos origem a dois triângulos equiláteros que ficam sobre a base do triângulo equilátero que está sendo dividido, um triângulo equilátero vizinho a estes dois (com um de seus vértices sobre a base do triângulo equilátero que está sendo dividido) e um outro triângulo equilátero acima dos demais. À fileira dos três triângulos equiláteros vizinhos, com dois deles sobre a base do triângulo dividido e o outro entre esses dois triângulos, daremos o nome de *camada*, destacada em vermelho na figura abaixo:

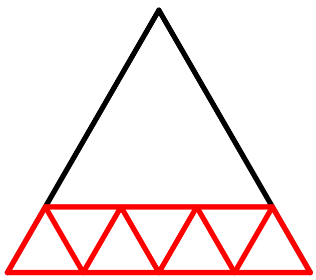


Então, o triângulo maior está dividido em uma camada com 3 triângulos na base do triângulo maior e exatamente um triângulo acima desta camada. De forma semelhante, observe que, dividindo a base do triângulo equilátero da direita (no enunciado) em três segmentos iguais e construindo vários triângulos equiláteros cujo lado é um terço do lado do triângulo equilátero maior, damos origem a uma camada com 5 triângulos na base do triângulo maior, havendo mais um triângulo acima desta camada. Veja a figura a seguir, na qual a camada com 5 triângulos está destacada em vermelho:

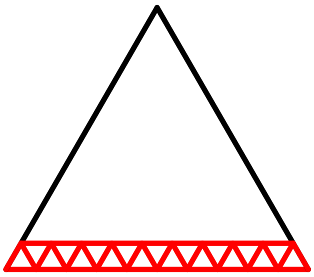


Desta maneira, ao dividir a base do triângulo equilátero maior em n partes iguais, obtemos $2n-1$ triângulos equiláteros adjacentes cujo lado mede $\frac{1}{n}$ do lado do triângulo equilátero maior (sendo n triângulos localizados sobre a base deste e $n-1$ triângulos localizados entre dois dos n triângulos que estão sobre a base do triângulo a ser dividido) e um triângulo equilátero acima de todos estes (cujo lado mede $\frac{n-1}{n}$ do lado do triângulo equilátero maior). Portanto, dividindo a base do triângulo equilátero maior em n partes iguais, podemos obter uma divisão deste triângulo em $2n$ triângulos equiláteros menores.

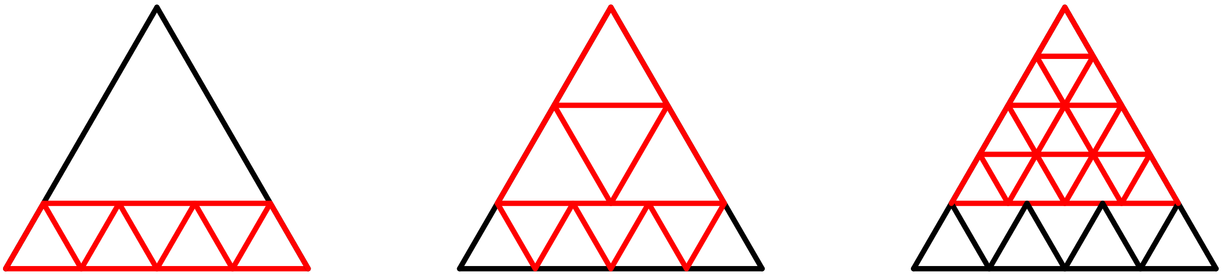
Assim, para dividir o triângulo equilátero em 8 triângulos equiláteros menores, podemos dividir a base do triângulo em 4 segmentos de mesma medida, de modo a formar uma camada com 7 triângulos equiláteros iguais na base do triângulo, além de mais um triângulo acima dessa camada. Observe a figura:



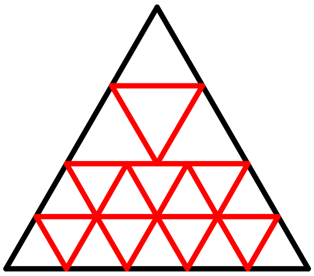
(c) Pelo raciocínio apresentado no item anterior, podemos dividir um triângulo equilátero em qualquer quantidade par de triângulos equiláteros menores, bastando dividir a base do triângulo a ser dividido em algumas partes iguais e construir triângulos menores cujos lados sejam iguais às partes iguais da base do triângulo. Para dividir um triângulo equilátero em 20 triângulos equiláteros menores de acordo com esse raciocínio, devemos dividir a base do triângulo maior em 10 segmentos de mesma medida e construir uma camada de 19 triângulos equiláteros cujos lados sejam iguais à medida desses segmentos, de modo que haverá um triângulo equilátero acima dessa camada. Apresentamos esta possível solução na figura a seguir:



Além desta, existem outras soluções, que podem ser obtidas de diversas maneiras. Por exemplo, uma outra maneira de dividir um triângulo equilátero em 20 triângulos equiláteros menores consiste em dividir o triângulo original em 8 triângulos menores (como apresentado no item (b)), dividir o maior desses pedaços em 4 partes iguais (como apresentado no enunciado), totalizando $8 + 3 = 11$ triângulos (observe que cada divisão de um triângulo em 4 triângulos iguais faz com que a quantidade de triângulos aumente em 3) e, em seguida, dividir cada uma dessas 4 partes em 4 partes iguais, totalizando $11 + 3 \cdot 3 = 20$ triângulos. Observe a figura a seguir:



A título de curiosidade, apresentamos mais uma solução a seguir:



4. (20 pontos) Miriam comprou um relógio digital cujo *display* (ou visor) exibe os números de 0 a 9 da seguinte maneira:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

No *display* do relógio são exibidos quatro dígitos: dois para as horas, exibidas **em formato 24 horas**, dois pontos demarcando a divisão entre horas e minutos e outros dois dígitos representando os minutos. Por exemplo, o início desta prova foi às $\boxed{09:00}$ (nove horas) e o término desta prova será às $\boxed{12:00}$ (doze horas).

(a) Daniel, sobrinho de Miriam, olhou para o relógio em certo momento do dia e gritou assustado: "TIA, SÃO 61 HORAS E 02 MINUTOS!"
O problema é que o relógio estava de ponta-cabeça!
Qual era a hora certa naquele momento?

(b) Depois de um tempo, Daniel percebeu que certos horários, quando vistos de ponta-cabeça, não se alteram em relação ao original. Por exemplo, às 15 horas e 51 minutos o relógio exibe $\boxed{15:51}$ em qualquer orientação (desconsidere o espaço em branco deixado pelo número 1 para fins de simetria). Daniel chamou tais horários de *horários especiais*.
Quantos horários especiais existem?

Solução:

(a) Daniel viu algo parecido com isto aqui no visor:

$$\boxed{61:02}$$

Rotacionando o relógio em 180°, obtemos $\boxed{20:19}$. Logo, eram 20 horas e 19 minutos naquele momento.

(b) Os dígitos 0, 1, 2, 5 e 8 são os únicos que, de ponta-cabeça, permanecem inalterados, então só existem horários especiais com esses dígitos. Além disso, um horário válido deve estar entre 00:00 e 23:59. Vamos separar por casos:

- Horários começados com 0: O primeiro zero pode estar acompanhado de qualquer dígito, exceto o 8;
- Horários começados com 1: O primeiro um também pode estar acompanhado de qualquer dígito, exceto o 8;
- Horários começados com 2: O primeiro dois pode ser acompanhado pelo 0, pelo 1 ou pelo 2, mas não pelo 5 e nem pelo 8.

Somando todos os casos, temos onze possibilidades, listadas a seguir:

$\boxed{00:00}$ $\boxed{01:10}$ $\boxed{02:20}$ $\boxed{05:50}$ $\boxed{10:01}$ $\boxed{11:11}$

$\boxed{12:21}$ $\boxed{15:51}$ $\boxed{20:02}$ $\boxed{21:12}$ $\boxed{22:22}$

5. (20 pontos) Seu Arnô é um orgulhoso avô de 52 netos. Um dia, quando todos os netos estavam reunidos em sua casa, Seu Arnô alinhou, em ordem numérica crescente, 52 caixinhas fechadas com tampa removível enumeradas com os números de 1 a 52 cada, onde haviam presentes para cada um dos netos. Fã de Matemática e de brincadeiras não muito convencionais, o simpático avô pediu que os netos formassem fila indiana e, após isso, deu as seguintes instruções:

- Cada um de vocês receberá um número n de 1 a 52 de acordo com a posição na fila;
- O neto número 1 vai abrir todas as caixinhas;
- O neto número 2 vai fechar as caixinhas pares;
- A partir do 3º neto, o neto número n vai abrir as caixinhas fechadas e fechar as caixinhas abertas, ou seja, vai *mexer* nas caixinhas com números múltiplos de n.

(a) O neto número 52, o último da fila, direcionou-se à caixinha 52 e seguiu a instrução do avô. Ele abriu a caixinha fechada ou fechou a caixinha aberta?

(b) Qual caixinha foi *mexida* (aberta e fechada) mais vezes?

(c) Quantas e quais caixinhas ficaram abertas ao final da brincadeira?

(d) Por que as caixinhas do item anterior ficaram abertas?
*Dica: observe as quantidades de divisores dos números das caixinhas e justifique sua resposta utilizando paridade – conceito que divide os números naturais em **pares** e **ímpares**.*

Solução:

(a) A caixinha número 52 foi aberta pelo neto número 1, fechada pelo neto número 2, aberta pelo neto número 4, fechada pelo neto número 13 e aberta pelo neto número 26. Sendo assim, o neto número 52 fechou a caixinha que estava aberta.

(b) A caixinha que foi mexida mais vezes foi a caixinha que possui mais divisores dentro do intervalo. Este número é o $48 = 2^4 \times 3^1$, que possui $(4+1) \times (1+1) = 10$ divisores.

(c) Ao final da brincadeira, restaram sete caixinhas abertas: as caixinhas de número 1, 4, 9, 16, 25, 36 e 49.

(d) São necessárias duas mexidas para que a caixinha fique fechada (um neto abre a caixinha e o outro fecha). Assim, podemos afirmar que toda caixinha cujo número possui quantidade **par** de divisores estará fechada ao final da brincadeira. Os números mencionados no item anterior são quadrados perfeitos, números que possuem uma quantidade **ímpar** de divisores, ou seja, serão mexidas por um número ímpar de netos. Como todas as caixinhas começam fechadas, elas terminarão a brincadeira abertas.