O seguinte arquivo contém soluções propostas pela Equipe Organizadora da OPM 2018 para cada uma das questões da prova, além de observações e comentários adicionais. Respostas corretas obtidas por meios diferentes também receberão pontuação máxima e poderão até ser divulgadas se forem consideradas criativas! **Lembramos que as pontuações de cada item não serão divulgadas, assim como as pontuações individuais.**

Nível 3 - Problemas e soluções

1. (20 pontos) Observe o padrão abaixo:

1ª linha:	1					
2ª linha:	2	2				
3ª linha:	3	4	3			
4ª linha:	4	6	6	4		
5ª linha:	5	8	9	8	5	
6ª linha:	6	10	12	12	10	6
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\ddots$

(a) Seguindo o padrão, escreva as três próximas linhas.

(b) Em qual linha o número 2018 aparecerá escrito pela primeira vez?

(c) Mostre que existe um quadrado perfeito em todas as linhas ímpares.

Solução:

(a) Observe que na n-ésima coluna estão escritos os múltiplos de n. Podemos completar então as próximas 3 linhas

1ª linha:	1								
2ª linha:	2	2							
3ª linha:	3	4	3						
4ª linha:	4	6	6	4					
5ª linha:	5	8	9	8	5				
6ª linha:	6	10	12	12	10	6			
7ª linha:	7	12	15	16	15	12	7		
8ª linha:	8	14	18	20	20	18	14	8	
9ª linha:	9	16	21	24	25	24	21	16	9

(b) Na n-ésima coluna, são escritos somente os múltiplos de n. Como os divisores de 2018 são 1, 2, 1009 e 2018, então 2018 só pode estar na 1ª, 2ª, 1009ª e na 2018ª colunas.

Coluna	Linha em que 2018 aparece
1ª	2018ª
2ª	1010ª
1009ª	1010ª
2018ª	2018ª

A resposta é então: Na 1010ª linha.

(c) Observando as 9 primeiras linhas, podemos ver que nas linhas ímpares, o termo do meio é sempre um quadrado perfeito. Vamos mostrar então que nas linhas ímpares, o elemento central é um quadrado perfeito.

Seja m um número inteiro positivo ímpar. Podemos representá-lo na forma $m = 2n - 1$ com $n \in \mathbb{N}$. Na m-ésima linha existem $m = 2n - 1$ elementos. Portanto, o termo do meio da m-ésima linha, que vamos denotar por x, é um elemento da n-ésima coluna, ou seja, $x = nk$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcccccccc}
1^{\text{a}}\text{ linha:} & 1 \\
2^{\text{a}}\text{ linha:} & 2 & 2 \\
3^{\text{a}}\text{ linha:} & 3 & 4 & 3 \\
4^{\text{a}}\text{ linha:} & 4 & 6 & 6 & 4 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
n\text{-ésima linha:} & n & & & & & n \\
\vdots & \vdots & & & & & \vdots & \ddots \\
m\text{-ésima linha:} & m & & & & & x = nk & & m
\end{array}$$

Isso quer dizer então que x está $k - 1$ linhas abaixo de n (na n-ésima coluna), ou seja, $m = n + (k - 1)$. Temos então

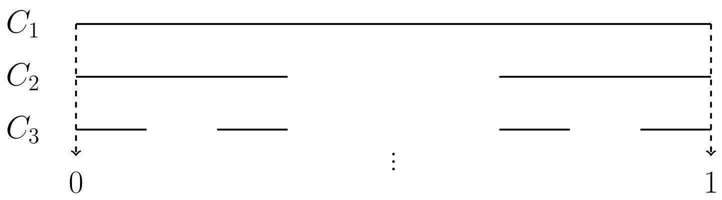
$$x = nk = n(m - n + 1) = n(2n - 1 - n + 1) = n^2.$$

2. (20 pontos) Um cientista, estudando compostos químicos em uma amostra de bactérias, realizou o seguinte experimento: com o auxílio de um microscópio, ele espalhou toda a amostra de bactérias em um segmento de reta com uma unidade de comprimento, denotando-a por C_1.

Logo após, ele aplicou o composto e observou que a terça parte central (sem remover as extremidades) desapareceu e denotou os novos segmentos de reta por C_2 (referente ao seu comprimento).

Novamente, aplicando o composto, ele notou que a terça parte central (sem as extremidades) de cada um dos dois segmentos de reta que constituem C_2 tinha desaparecido. E o que sobrou seria denotado por C_3 (referente ao seu novo comprimento).

Esse processo poderia ser continuado, sempre removendo, em cada estágio, a terça parte central de cada segmento em C_n para formar C_{n+1}. Formando assim, uma nova colônia de bactérias de C_1 que não foram removidas em nenhuma etapa.



(a) Na figura dada, indique os números nas extremidades dos segmentos C_1, C_2 e C_3.

(b) Quais dentre os pontos $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{81}$ e $\frac{4}{81}$ pertencem aos segmentos de retas da colônia de bactérias que restou?

(c) Quais são os comprimentos C_3, C_4 e C_5? Encontre alguma expressão para o comprimento de C_n.

Solução:

(a)
- Em $C1$ não é retirado nenhum ponto. Portanto, $C_1 = [0, 1]$ e os números em suas extremidades são 0 e 1;
- Para obter C_2 retira-se a terça parte central de C_1, isto é, retira-se o intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ sobrando os intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Assim, as extremidades de C_2 são $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1.
- Para obter C_3, retira-se de C_2 os intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, sobrando então os intervalos $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ e $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Assim, as extremidades de C_3 são $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ e 1.

(b)
- $1/3$ é uma extremidade de C_2, portanto , pertence ao conjunto de Cantor.
- $4/9$ está entre $1/3$ e $2/3$, portanto, está no terço central de C_1, que foi removido. Assim, $4/9$ não pertence ao conjunto de Cantor.
- Observe que $3/81 = 1/27$. O primeiro intervalo que compõe C_4 é $\left[0, \frac{1}{27}\right]$, portanto, $3/81 = 1/27$ pertence ao conjunto de Cantor. (De modo geral, todo número da forma $\frac{1}{3^n}$ com $n \in \mathbb{N}$ pertence ao conjunto de Cantor).
- $4/81$ está entre $1/27$ e $2/27$, portanto, está no terço central do primeiro segmento de C_3, que foi removido, assim, $4/81$ não pertence ao conjunto de Cantor.

(c) Recursivamente: Observe que C_1 tem comprimento 1, C_2 tem comprimento $2/3$, C_3 tem comprimento $4/9$, C_4 tem comprimento $8/27$ e C_5 tem comprimento $16/81$. Assim, os comprimentos de C_1, C_2, C_3, ... ,C_n, ... formam uma progressão geométrica de razão $q = 2/3$ e primeiro termo $a_1 = 1$, como segue: 1, $(2/3)$, $(2/3)^2$, $(2/3)^3$, $(2/3)^4$, ... , $(2/3)^{n-1}$, ...

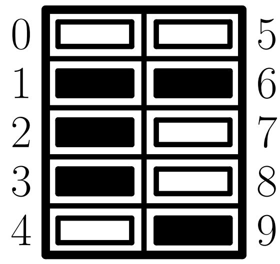
De outra maneira, observe que em cada etapa, o número de intervalos é o dobro da etapa anterior, isto é, C_1 tem um intervalo, C_2 tem dois intervalos, C_3 tem quatro intervalos, $\ldots, C_n$ tem 2^{n-1} intervalos.
E em cada etapa o comprimento de cada intervalo restante é um terço do comprimento dos intervalos da etapa anterior, ou seja, C_1 tem intervalo de comprimento 1, C_2 tem intervalos de comprimento $\frac{1}{3}, \ldots, C_n$ tem intervalos de comprimento $\frac{1}{3^{n-1}}$.
Dessa forma, o comprimento de C_n é $2^{n-1} \times \frac{1}{3^{n-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

3. (20 pontos) Um cadeado com 10 botões pode ser aberto apertando, em qualquer ordem, os **cinco botões corretos**. Cada botão só pode ser apertado uma vez, ou não ser apertado. Na figura abaixo, a combinação correta para desbloquear o cadeado é $\{1, 2, 3, 6, 9\}$, cujos botões estão pintados de preto.

   (a) Quantas combinações de senhas com 5 botões existem?

   (b) Uma versão aprimorada do cadeado permite que o usuário escolha senhas com no mínimo um botão e no máximo nove botões. Quantas senhas **a mais** essa nova versão permite?

   (c) Qual é a probabilidade de uma senha com sete dígitos não conter o número 7?



Solução:

(a) Como é dito no enunciado, a senha não depende da ordem digitada. Quando escolhemos 5 botões para formar uma senha, a ordem que escolhemos não faz diferença. Esse é um clássico problema de **combinação** de 10 botões tomados 5 a 5: neste caso, o número total de combinações é

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

(b) Basta então contar quantas senhas com 1, 2, ..., 8 ou 9 botões são possíveis. Usando o mesmo argumento do item (a), temos que o número total de senhas com no mínimo um botão e no máximo 9 botões é:

$$C_{10,1} + C_{10,2} + \ldots + C_{10,9} = 1022.$$

Portanto, o número de senhas **a mais** é

$$1022 - 252 = 770.$$

(c) O número de senhas com sete botões, como já vimos, é $C_{10,7} = 120$.

Quantas senhas contém o botão 7? Fixado o botão 7, basta escolher seis botões em nove (pois o botão 7 não pode ser repetido), isto é, $C_{9,6} = 84$. Portanto, o número de senhas de sete dígitos que não contém o 7 é $120 - 84 = 36$.

Por fim, a probabilidade de um senha de sete botões não conter o botão 7 é

$$\frac{36}{120} = 0,3 = 30\%.$$

4. (20 pontos) César e Fabiano criaram um jogo com as seguintes regras:

(i) É definido um natural arbitrário x, que podemos chamar de **número perdedor**;

(ii) O primeiro a jogar escreve no quadro um número inteiro entre 2 e 9;

(iii) Depois disso, alternadamente, o próximo a jogar soma um natural de 2 a 9 ao número escrito anteriormente;

(iv) Perde quem escrever um número igual ou superior a x.

Sabendo que $x = 50$ e que César será o primeiro a jogar, responda:

(a) Existe uma estratégia que César pode utilizar para ganhar sempre. Tente descobri-la.

(b) Fabiano, incomodado com as condições iniciais, propõe uma pequena mudança na segunda regra, mantendo todas as outras como estão, e mudando o valor de x para 500:

(iii)' Depois disso, alternadamente, o próximo a jogar **multiplica o número escrito anteriormente por um natural de 2 a 9.**

Ainda existe alguma estratégia vencedora para César, caso ele ainda seja o primeiro a jogar? Em caso afirmativo, descreva como ela funciona. Em caso negativo, descreva como Fabiano pode sempre ganhar o jogo.

Solução:

(a) Observe que existe um (único) número que sempre pode ser obtido como soma de dois números entre 2 e 9, que é o número 11. Note também que para César ganhar, a última jogada dele deve deixar escrito no quadro os números 48 ou 49. Como $48 = 11 \times 4 + 4$, César deve começar escrevendo o número 4 no quadro e, nas jogadas seguintes, procurar "somar" 11 em relação ao número escolhido por Fabiano na jogada anterior. A tabela seguinte mostrar como César pode vencer em 5 rodadas:

	César	Fabiano	Nº deixado no quadro
1ª rodada	4 (ou 5)	x_1	$y = 4 + x_1 \leq 13$
2ª rodada	$11 - x_1$	x_2	$z = y + (11 - x_1) + x_2 = 15 + x_2 \leq 24$
3ª rodada	$11 - x_2$	x_3	$w = z + (11 - x_2) + x_3 = 26 + x_3 \leq 35$
4ª rodada	$11 - x_3$	x_4	$s = w + (11 - x_3) + x_4 = 37 + x_4 \leq 46$
5ª rodada	$11 - x_4$		

Note que César, na quinta rodada, deixa o número $(11 - x_4) + s = 48$ escrito no quadro e, portanto, vence o jogo.

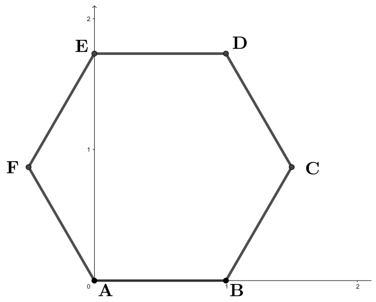
(b) Note que, agora, ganha quem deixar escrito no quadro um número entre 250 e 499. Observe ainda que $250/9 \approx 28$ Portanto, Aquele que, na sua vez de jogar, encontrar escrito no quadro um número entre 28 e 249 tem a estratégia para vencer.
Novamente, aquele que deixar para o outro um número entre $28/2 = 14$ e $249/9 \approx 27$ tem a estratégia para ganhar.
Neste ponto, já podemos deduzir que Fabiano tem a estratégia:

	César escreve	Fabiano deixa	Intervalo que César pode deixar	Fabiano
Caso 1	2, 3, 6 ou 9	18	$[36, 162]$	vence
Caso 2	4 ou 8	16	$[32, 144]$	vence
Caso 3	5	15	$[30, 135]$	vence
Caso 4	7	14	$[28, 126]$	vence

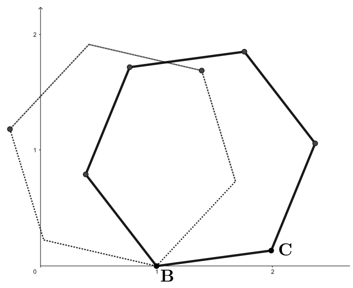
Neste caso, o cenário se inverte em relação ao jogo anterior, onde o primeiro jogador não tem mais a estratégia vencedora.

Sugestão: Como a estratégia vencedora muda, em ambos os jogos, conforme variamos o número perdedor x? Para quais números perdedores Fabiano tem a estratégia vencedora no primeiro jogo? E para quais números perdedores César passa a ser dono do seu próprio destino? Convidamos todos vocês a participarem dessa experiência e até a jogar com seus amigos!

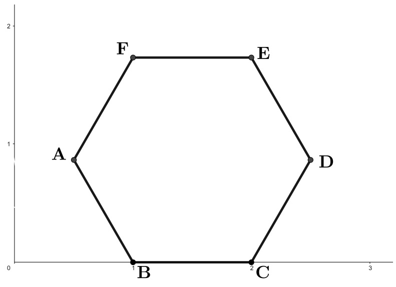
5. (20 pontos) Um hexágono $ABCDEF$ de lado 1 se encontra com um dos seus lados sobre o eixo X. Inicialmente o ponto A se encontra sobre a origem do eixo cartesiano, e o ponto B sobre o ponto $(1, 0)$. O hexágono começa a rolar sobre o eixo X para a direita de modo que, a cada minuto, o hexágono se encontra sobre a próxima base.



Minuto 0



Entre os minutos 0 e 1



Minuto 1

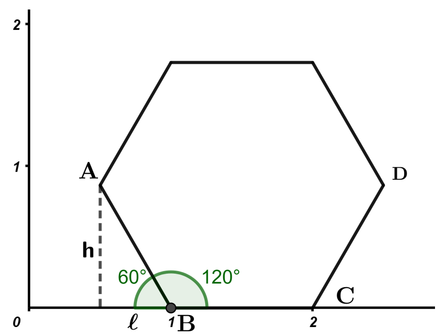
(a) Determine as coordenadas do ponto A nos minutos 1, 2, 3 e 4.

(b) Determine o comprimento da curva que o ponto A descreve do minuto 0 ao 5.

Solução: Lembre-se que: A medida de um ângulo interno, em graus, de um polígono regular de n lados é dado por $\dfrac{180(n-2)}{n}$. No caso de um hexágono, qualquer ângulo interno mede 120.

(a)

Observe a figura ao lado:



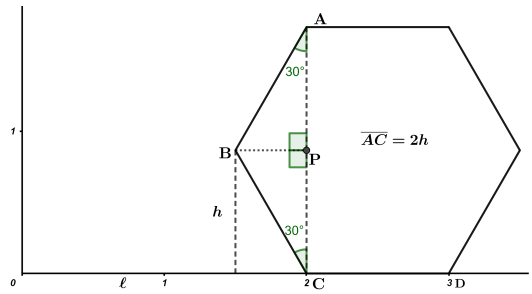
Temos que $A\hat{B}O = 180° - A\hat{B}C = 60°$. Assim,

$$\frac{1}{2} = \cos(60°) = \frac{\ell}{\overline{AB}} = \ell$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}(60°) = \frac{h}{\overline{AB}} = h.$$

Assim, no minuto 1: $A = (1 - \ell, h) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

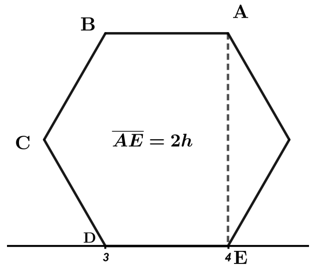
Agora, no minuto 2, temos:



Os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle CBP$ são congruentes. Portanto, $\overline{AC} = 2h = \sqrt{3}$. Assim, no minuto 2, temos $A = (2, \sqrt{3})$.

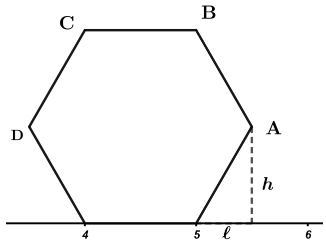
No minuto 3, temos

$$A = (4, 2h) = (4, \sqrt{3}).$$

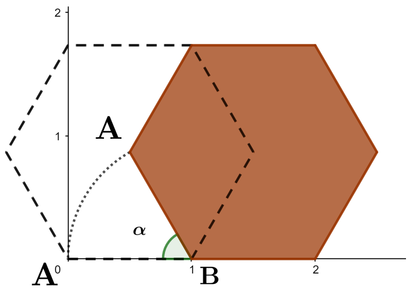


No minuto 4, temos

$$A = (5 + \ell, h) = \left(\frac{11}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



(b) (i) Entre os minutos 0 e 1:
Entre os minutos 0 e 1, o ponto B fica imóvel enquanto o segmento AB gira $\alpha = 180 - 120 = 60$ graus. Note então que A percorre um arco de cicunferência de $60°$ com centro em B de raio 1:

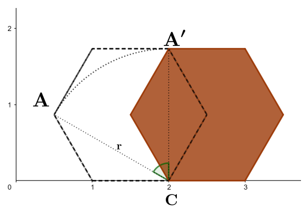


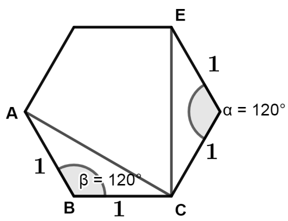
Assim, neste período, A percorre $1/6$ de uma circunferência, ou seja

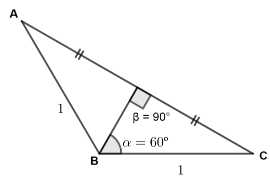
$$\frac{2\pi \cdot 1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

(ii) Entre os minutos 1 e 2:

Observe os esquemas abaixo:







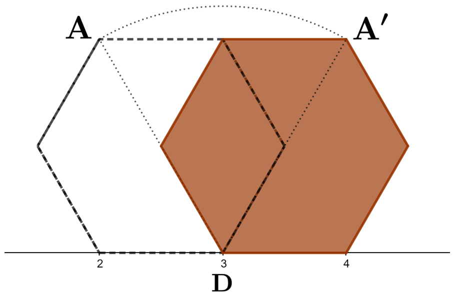
Como $\triangle ABC$ é isósceles, então $B\hat{C}A = 30°$. Pelo mesmo motivo, $E\hat{C}D = 30°$. Portanto, $A\hat{C}E = 120° - 30° - 30° = 60°$. Ou seja, A percorre mais um arco de $60°$ de uma circunferência de raio $r = \overline{CA}$. Temos então

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(60°) = \frac{\frac{\overline{CA}}{2}}{1} = \frac{\overline{CA}}{2} \Longrightarrow \overline{CA} = \sqrt{3}.$$

Então o ponto A percorre mais

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

(iii) Entre os minutos 2 e 3:
Observe a figura abaixo.



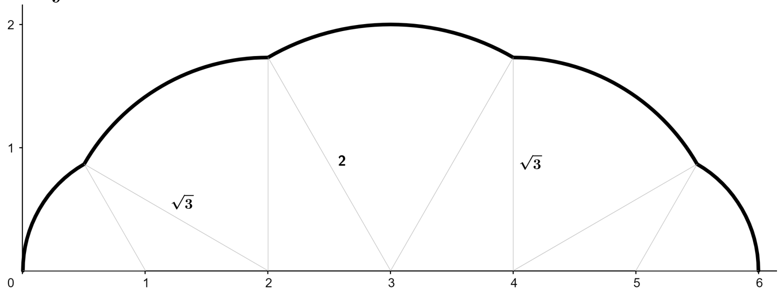
Temos que $A\hat{D}A' = 60°$. Claro que $\overline{DA} = \overline{DA'}$. Portanto, $\triangle ADA'$ é equilátero e, assim, $\overline{DA} = 2$. Portanto, A percorre desta vez

$$\frac{2\pi \cdot 2}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

(iv) Semelhante ao caso (ii).

(v) Semelhante ao caso (i).

Representação da trajetória de A :



Total: $2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi(2+\sqrt{3})}{3}.$