O seguinte arquivo contém soluções propostas pela Equipe Organizadora da OPM 2018 para cada uma das questões da prova, além de observações e comentários adicionais. Respostas corretas obtidas por meios diferentes também receberão pontuação máxima e poderão até ser divulgadas se forem consideradas criativas! **Lembramos que as pontuações de cada item não serão divulgadas, assim como as pontuações individuais.**

# Nível 2 - Problemas e soluções

1. (20 pontos) Edgar pensou dois números inteiros positivos distintos. Primeiro, ele calculou a soma de ambos. Em seguida, o produto entre eles. Ao somar os dois resultados calculados, Edgar obteve 80 como resultado final. Considerando que não houveram erros de cálculos, quais foram os números pensados por Edgar?

**Solução:** Temos que buscar soluções inteiras, positivas e distintas para a equação $x + y + xy = 80$. Há um modo bastante econômico, em termos de contas, para solucionar o problema, que é usar o produto a seguir:

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1.$$

Viram que semelhança incrível com a equação de Edgar? Usaremos isso a nosso favor.

$$x + y + xy + 1 = 80 + 1$$
$$(x + 1)(y + 1) = 81$$

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $x > y$. Como os divisores de 81 são $1,\ 3,\ 9,\ 27$ e $81$, vamos analisar cada produto que resulta 81:

- $x + 1 = 81,\ y + 1 = 1 \Rightarrow$ Impossível, pois $y > 0$;
- $x + 1 = 27,\ y + 1 = 3 \Rightarrow x = 26,\ y = 2$;
- $x + 1 = 9,\ y + 1 = 9 \Rightarrow$ Impossível, pois $x \neq y$.

Portanto, Edgar pensou nos números 2 e 26.

**Nota:** Quem encontrou as soluções corretas por outros meios matematicamente válidos também receberá pontuação total (quem usou tentativa e erro deve concluir a unicidade da solução).

2. (20 pontos) Mayssa tem uma moeda viciada[1] de modo que, ao lançá-la, a probabilidade de cair com a face cara para cima é $\frac{2}{3}$ e a de cair coroa é $\frac{1}{3}$. Ela chama seu amigo Igor para jogar e oferece duas opções:

- Na primeira opção, Igor lança a moeda três vezes e ganha somente se saírem três caras seguidas;
- Na segunda opção, Igor tem direito a lançar a moeda quatro vezes. Ele ganha se seus dois primeiros lançamentos caírem com a mesma face para cima e se o mesmo acontecer com os dois últimos lançamentos (não necessariamente as mesmas faces dos lançamentos anteriores). Por exemplo: uma sequência cara-cara-coroa-coroa é vencedora, mas coroa-cara-cara-coroa não é.

Com base nas informações acima, responda:

(a) Qual é a probabilidade de Igor vencer caso escolha a primeira opção?

(b) Qual é a probabilidade de Igor vencer caso escolha a segunda opção?

(c) Para ter mais chances de vitória, qual jogo Igor deve escolher: a primeira ou a segunda opção?

**Solução:**

(a) A probabilidade de Igor vencer na primeira opção, isto é, tirar três caras seguidas, é $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. Veremos que é melhor escrever a resposta como sendo $\frac{24}{81}$. Aguarde...

(b) Para Igor vencer neste jogo, ele tem quatro opções:

i. Igor vence com cara nas quatro jogadas; a probabilidade deste evento acontecer é $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$.

ii. Igor vence com cara nas duas primeiras jogadas e coroa nas duas últimas; a probabilidade deste evento acontecer é $\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$.

iii. Igor vence com coroa nas duas primeiras jogadas e cara nas quatro últimas jogadas; a probabilidade deste evento acontecer é $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$.

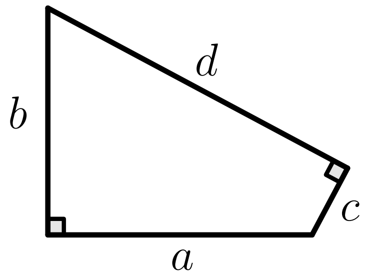
iv. Igor vence com coroa nas quatro jogadas; a probabilidade deste evento acontecer é $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

Somando os casos anteriores, concluímos que a probabilidade de Igor vencer no segundo jogo é de $\frac{16+4+4+1}{81} = \frac{25}{81}$.

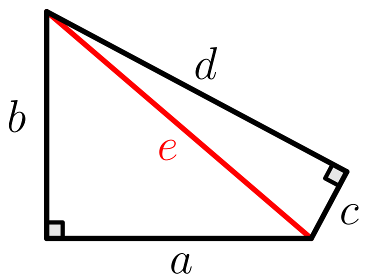
(c) Como $\frac{25}{81} > \frac{24}{81}$, Igor deve escolher a segunda opção para maximizar suas chances de vitória. Pois é, reescrever a resposta do item (a) foi útil apenas para poupar trabalho.

[1] Uma moeda que não é honesta, ou seja, onde as chances de sair cara ou coroa não são iguais.

3. (20 pontos) O quadrilátero da figura abaixo possui lados inteiros e distintos entre si. Há dois ângulos retos indicados na figura. Além disso, sabemos que $a = 7$ e $d = 9$. Determine as medidas dos outros dois lados.




**Solução:** A presença de ângulos retângulos opostos em um quadrilátero tem o objetivo de fazer o estudante traçar a diagonal conveniente e usar o Teorema de Pitágoras. Veja a figura a seguir:




Com a diagonal $e$ traçada, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = e^2 \\ c^2 + d^2 = e^2 \end{cases} \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \tag{1}$$

Sabemos as medidas dos lados $a$ e $d$. Podemos reescrever (1) da seguinte maneira:

$$b^2 - c^2 = d^2 - a^2 \Longrightarrow (b + c)(b - c) = 81 - 49 = 32 \tag{2}$$

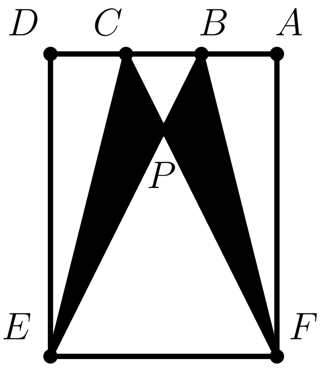
A equação (2) é muito útil para nós, pois nos permite encontrar $b$ e $c$ através de sistemas de equações, bastando igualar $b + c$ e $b - c$ a divisores de 32. Como D(32)={1, 2, 4, 8, 16, 32}, temos os sistemas a seguir:

$$\begin{cases} b + c = 32 \\ b - c = 1 \end{cases} \Longrightarrow b = \frac{33}{2},\ \ c = \frac{31}{2} \Rightarrow\Leftarrow \text{(notação para contradição)},\ \text{pois } b,\ c \in \mathbb{N};$$

$$\begin{cases} b + c = 16 \\ b - c = 2 \end{cases} \Longrightarrow b = 9,\ \ c = 7 \Rightarrow\Leftarrow,\ \text{pois os lados são todos distintos;}$$

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ b - c = 4 \end{cases} \Longrightarrow b = 6,\ \ c = 2,\ \text{que é a solução procurada.}$$

4. (20 pontos) Daniel vai a uma festa à fantasia e decidiu caprichar no figurino: com a ajuda dos seus pais, cortou duas asas de morcego em um tecido com 4 metros de altura e 3 metros de largura, como mostrado na figura abaixo.




Sabendo que $\overline{DC} = \overline{CB} = \overline{BA}$ e, além disso, os segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{FC}$ se cruzam no ponto $P$, calcule a área do tecido que faz parte das asas de morcego (região em preto na figura).

**Solução: Nota da Equipe:** ninguém especificou qual era a largura e qual a altura do tecido, nem sempre a figura está desenhada em escala! Mas quem definiu o lado maior como sendo 3 e o menor como sendo 4 (ou vice-versa) não terá maiores problemas se acertar os cálculos. Mas fica a dica para as próximas. ☺

Digamos que $\overline{EF} = x$ e $\overline{FA} = y$. Sabemos que $x \cdot y = 12$, pois é a área total do tecido. Além disso, $\overline{DC} = \overline{CB} = \overline{BA} = \dfrac{x}{3}$. Para determinar a área das asas do morcego, iremos retirar, da área total, a área em branco, que não foi utilizada na fantasia. Esta área corresponde à área de quatro triângulos:

$$\text{Área de } \triangle DCE = \frac{x \cdot y}{3 \cdot 2} = \frac{12}{6} = 2$$
$$\text{Área de } \triangle BAF = \frac{x \cdot y}{3 \cdot 2} = \frac{12}{6} = 2$$

Não conhecemos ainda a altura do triângulo $CBP$ (relativa a $\overline{CB}$) e nem a do triângulo $EFP$ (relativa a $\overline{EF}$. No entanto, esses triângulos são semelhantes e a razão de semelhança $\dfrac{EF}{CB} = 3$ (verifique!). Sejam $h_1$ a altura relativa a $\overline{CB}$ no $\triangle CBP$ e $h_2$ a altura relativa a $\overline{EF}$ no $\triangle EFP$. Usaremos os seguintes fatos: que $\boxed{h_1 + h_2 = y}$ e $\boxed{h_2 = 3h_1}$ (da semelhança de triângulos) para calcular soma das áreas restantes:

$$\text{Área de } \triangle CBP = \frac{\frac{x}{3} \times \frac{y}{4}}{2} = \frac{xy}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Área de } \triangle EFP = \frac{x \times \frac{3y}{4}}{2} = \frac{3xy}{8} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Área das asas} = 12 - \left(2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) = 12 - 9 = 3\text{m}^2$$

5. (20 pontos) Certo dia, a professora Miriam perdeu a paciência com a sua turma, pois todos conversavam sem parar quando ela ia começar a entregar as provas feitas na semana anterior, devidamente corrigidas e com notas variando de 0 a 100. Chateada, ela falou:

Por conta da indisciplina de todos vocês, irei retirar $x\%$ da nota $x$ que cada um havia tirado na prova!

(a) Cássio havia tirado 30 na prova. Portanto, após a punição, ele perdeu 30% de sua nota. Qual foi a nova nota de Cássio?

(b) Alguns estudantes que tiraram notas altas reclamaram da punição da professora, alegando que ficaram com a mesma pontuação de estudantes com pontuação baixa. A reclamação procede? Justifique matematicamente.

(c) Qual é a maior pontuação que pode ser obtida **após** a punição da professora Miriam?

**Solução:**

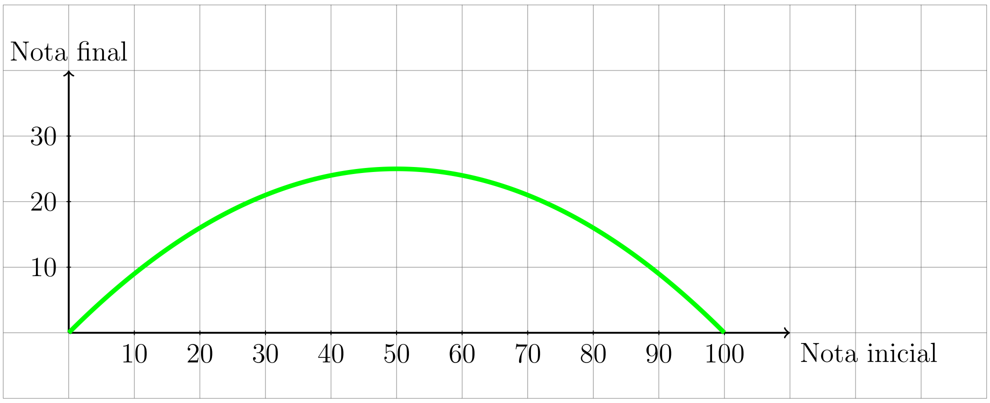
(a) Como Cássio havia tirado 30 pontos, ele foi punido com uma perda de 30% de sua nota. Como $30 \times 30\% = 9$, a nova nota de Cássio foi $30 - 9 = 21$.

(b) A reclamação procede sim! Por exemplo, basta observar que estudantes que tiraram 100 pontos no teste original ficaram com 0, mesma pontuação de quem não acertou nada na prova (e por isso não perdeu nada)! Às vezes a indisciplina custa bem caro...

Sendo $x \in [0, 100]$ a nota tirada originalmente pelo estudante, este perderá $x\%$ de $x$ após a punição. Como juntar matematicamente essas duas entradas em uma única relação? Podemos definir a seguinte relação, esboçando o gráfico logo abaixo:

$$\text{Nota final} = x - \left(\frac{x}{100}\right) \times x = x - \frac{x^2}{100}$$

.




(c) Descobrir a maior nota possível é descobrir o vértice de uma parábola, o que pode ser feito da seguinte forma:

$$\text{Vértice da parábola} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (50, 25)$$

Portanto, a nota máxima após a punição é 25, o que acontece com quem conseguiu 50 pontos na prova anterior.