O seguinte arquivo contém soluções propostas pela Equipe Organizadora da OPM 2018 para cada uma das questões da prova, além de observações e comentários adicionais. Respostas corretas obtidas por meios diferentes também receberão pontuação máxima e poderão até ser divulgadas se forem consideradas criativas! **Lembramos que as pontuações de cada item não serão divulgadas, assim como as pontuações individuais.**

Nível 1 - Problemas e soluções

1. (20 pontos) Ramon mora no Conde, no litoral sul da Paraíba. Entediado, ele associou cada letra da palavra $CONDE$ a um número do conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, de modo que cada número foi utilizado uma única vez. Temos as seguintes informações:

   - O número de três dígitos CON é divisível por 4;
   - O número de três dígitos OND é divisível por 5;
   - O número de três dígitos NDE é divisível por 3.

   Qual é o número de 5 dígitos $CONDE$ escrito por Ramon?

Solução: A solução proposta usará os critérios de divisibilidade por 3, 4 e 5.

Como o número de três dígitos OND é divisível por 5, então $\boxed{D=5}$, já que não foi utilizado o dígito 0. Analisando agora o número de três dígitos NDE, temos duas possibilidades: $N+5+E=9$ ou $N+5+D=12$, já que um número é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus dígitos também é divisível por 3. Vamos analisar cada caso:

- $N+5+E=9 \Rightarrow$ Temos duas soluções possíveis para este caso: $\boxed{N=1,\ E=3}$ ou $\boxed{N=3,\ E=1}$. No entanto, independentemente da solução escolhida, precisamos levar em consideração que o número CON é divisível por 4 e, portanto, par, logo N deve ser par, o que não acontece neste caso.

- $N+5+E=12 \Rightarrow$ Levando em conta a análise anterior, a única solução para este caso é $\boxed{N=4}$ e $\boxed{E=3}$.

Resta-nos apenas descobrir os dígitos C e O, cujas possibilidades são 1 e 2. Note que se $O=1$, o número de dois dígitos $ON=14$ não é divisível por 4, logo $\boxed{O=2}$, pois $4 \mid 24$ e, finalmente, $\boxed{C=1}$.

Assim, concluímos que o número de 5 dígitos escrito por Ramon é 12453.

2. (20 pontos) Em uma linda manhã de outubro, onde sol e chuva se alternavam a cada 30 minutos, Cássio entrou na **Loja 99**, um comércio onde os preços de todos os produtos terminam em 99 centavos. Quatro itens à venda chamaram a atenção de Cássio:

Item	Caneta	Pasta	Xícara	Tesoura
Preço	R$ 0,99	R$ 1,99	R$ 2,99	R$ 3,99

(a) É possível gastar **EXATAMENTE** 100 reais comprando os itens acima?

(b) E gastar exatamente 50 reais? É possível?

(c) Naquele dia, Cássio fez algumas compras que totalizaram 33 reais e 89 centavos. Quantos e quais itens ele comprou?

Solução:

(a) Como o valor de cada item termina em 99 centavos, precisamos comprar uma certa quantidade de itens de modo que o total seja uma quantia com 00 centavos. Como $\text{MDC}(99, 100) = 1$, precisamos comprar 100 itens para obter um total composto apenas por um número inteiro de reais. A menor aquisição que satisfaz este requisito é a compra de 100 canetas, que totaliza 99 reais. Comprando uma caneta no lugar de uma pasta, gastaremos $99 \times 0,99 + 1,99 = 100$ reais. Portanto, a resposta para este item é **sim**.

(b) No item anterior, vimos que a menor compra que pode ser feita com um valor inteiro de reais sem deixar troco custa 99 reais. Como $50 < 99$, não é possível gastar exatamente 50 reais nesta loja.

(c) Perceba que podemos ver a tabela de itens e preços da seguinte maneira:

Item	Caneta	Pasta	Xícara	Tesoura
Preço	R$ (1-0,01)	R$ (2-0,01)	R$ (3-0,01)	R$ (4-0,01)

É como se a cada item comprado a gente somasse um número inteiro e subtraíssemos um centavo do novo total. Vendo por esta ótica, fica mais fácil concluir que uma compra que custou 33 reais e 89 centavos teve $\boxed{11}$ itens comprados. Para encontrar quais itens foram comprados, imaginamos que a maioria dos estudantes usou o método tentativa e erro, que é perfeitamente válido, que consiste em encontrar soluções para o sistema de equações a seguir, onde x_1 é a quantidade de canetas compradas, x_2 é a quantidade de pastas compradas, x_3 é a quantidade de xícaras compradas e x_4, a de tesouras compradas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ 0.99x_1 + 1.99x_2 + 2.99x_3 + 3.99x_4 = 33.89 \end{cases}$$

Nota: Em alguns ambientes matemáticos do LaTeX, precisamos usar o ponto no lugar da vírgula para valores decimais, por isso a troca repentina de símbolos.

Os estudantes que argumentarem que não há apenas uma combinação de itens que Cássio pode ter comprado e apresentarem justificativa correta receberão pontuação máxima no item, assim como os estudantes que exibirem soluções específicas para o sistema acima, como 6 tesouras e 5 pastas.

3. (20 pontos) Apertando teclas de 0 a 9 de um cofre, Eliane cria uma senha de 6 algarismos para esse cofre.

   (a) Quantas senhas possíveis podem ser formadas usando os algarismos de 0 a 9?

   (b) Quantas são as senhas que começam com 2018?

   (c) Quantas são as senhas que contêm o bloco 05268, nessa ordem?

   (d) Em relação ao número total de senhas, qual é a fração que representa o número de senhas que começam com 2018?

   (e) Qual é a porcentagem do número de senhas que contêm o bloco 05268?

Solução: Note que o problema não impede senhas que comecem com o dígito 0 ou que contenham dígitos repetidos. Estudantes que fizeram esta interpretação equivocada do enunciado erraram a questão!

(a) Há 10 possibilidades de escolha para cada dígito, portanto podem ser formadas $10^6 =$ 1000000 (um milhão) de combinações possíveis.

(b) Sendo os quatro primeiros dígitos fixos, temos 10 possibilidades para cada um dos dois dígitos restantes, portanto há 100 senhas que começam com 2018.

(c) Se o bloco 05628 aparece nesta ordem, há apenas duas possibilidades de posição para o sexto dígito da senha: ou é o primeiro dígito, ou é o último. Como há 10 possibilidades para cada um dos dois casos, temos um total de 20 senhas que contém o bloco 05628.

(d) Como há 100 senhas que começam com 2018 e 1000000 de senhas totais, a fração correspondente é $\dfrac{100}{1000000} = \dfrac{1}{10000}$.

(e) O percentual de senhas que contém o bloco 05268 é igual a $\dfrac{20}{1000000} \times 100\% = 0.00002\%$.

SENHA

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Uma simples representação visual de um possível painel de cofre.

4. (20 pontos) O Mágico da OPM 2018 faz mágicas com cartões com formato de círculos, quadrados, triângulos e retângulos, numerados de 1 a 13 para cada formato. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha o cartão, calcule o dobro do número desse cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5". Depois, ele dá as seguintes instruções:

- Some 1, se o cartão for um círculo
- Some 2, se o cartão for um quadrado
- Some 3, se o cartão for um triângulo
- Some 4, se o cartão for um retângulo

E finaliza dizendo: "Diga-me o resultado final e eu lhe darei o formato e o número do cartão que você escolheu".

(a) Miriam escolheu o cartão no formato de triângulo com o número 5. Qual o número ela deve dizer ao Mágico da OPM 2018?

(b) Saul disse "Oitenta e oito" para o Mágico da OPM 2018. Qual é o número e o formato do cartão que ele escolheu?

(c) Após escolher um cartão, Raiza disse: "Oitenta e três" e o Mágico da OPM 2018 respondeu que ela errou algum cálculo. Explique como o Mágico da OPM 2018 pode saber disso.

Solução:

(a) Seguindo os passos do Mágico da OPM 2018, Miriam deve calcular o dobro do número do cartão ($5 \times 2 = 10$), somar 3 ($10 + 3 = 13$) e multiplicar o resultado por 5 ($13 \times 5 = 65$). Como o cartão dela tem o formato de um triângulo, ela deve dizer $65+3 = 68$ ao mágico.

(b) Seja x o número pensado por Saul. Seguindo os passos iniciais do mágico, primeiro ele obteve $2x$, em seguida calculou $2x + 3$ e, após a multiplicação por 5, encontrou $10x + 15$. Perceba que, como x é um número inteiro entre 1 e 13, a expressão $10x + 15$ resulta em um múltiplo de 5 **que termina em 5 - guarde este detalhe para o próximo item**. Para Saul ter dito 88, número que deixa resto 3 na divisão por 5, a única possibilidade admissível é que o cartão de Saul tenha o formato de um triângulo. Resolvendo a equação $10x + 15 + 3 = 88$, encontramos $x = 7$. Portanto, este foi o cartão de Saul: 7.

(c) Como observado no item anterior, na observação em negrito, Raiza deve somar 1, 2, 3 ou 4 a um número da forma $10x + 15$ para obter 83, o que é impossível.

Comentários adicionais: o mágico sabe que um cartão válido e contas corretas resultarão em um número terminado em 6, 7, 8 ou 9. Com essa informação, ele descobre o número do cartão (basta subtrair o valor dito pelo múltiplo de 5 imediatamente abaixo). Depois, mentalmente, o Mágico da OPM 2018 faz o seguinte: subtrai 15 do múltiplo de 5 encontrado anteriormente e divide o resultado por 10, encontrando o número do cartão! Se você entendeu o segredo, pratique a mágica com seus amigos e parentes!

Sugestão: você pode usar um baralho normal em vez de cartas com formatos especiais e, em vez de considerar os formatos, considerar os naipes: $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ *e* $\spadesuit$. *Divirta-se!*

5. (20 pontos) O Tangram é um antiquíssimo quebra-cabeça chinês muito simples, composto de apenas 7 peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 quadrado e 1 paralelogramo, que permitem a formação de mais de mil figuras diferentes[1].

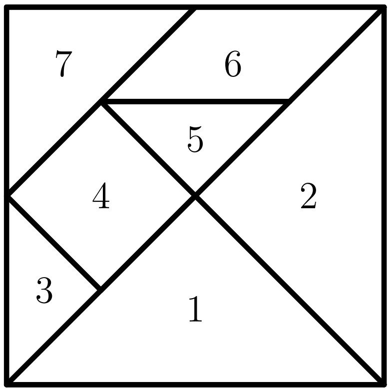


Figura 1.

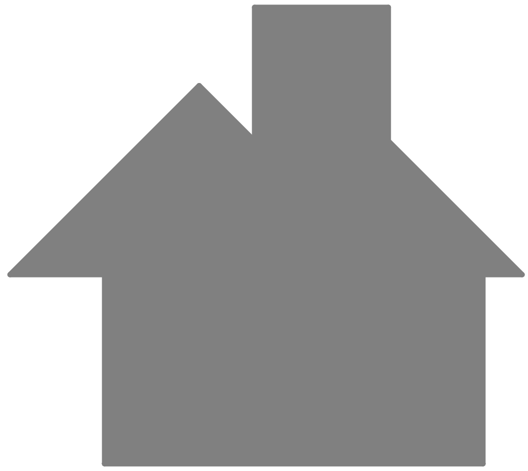


Figura 2.

Na Figura 1 está representado um Tangram. Sabendo que o lado do quadrado formado por todas as peças do Tangram é 4 **cm**, responda:

(a) Qual é a área de cada peça que compõe o Tangram?

(b) Um jovem usou todas as peças do Tangram para construir a casa da Figura 2 sem sobreposição. Qual a área da casa? Faça um desenho mostrando como as peças foram dispostas.

Solução:

(a) Se a medida do lado do quadrado da Figura 1 é 4 cm, então a área das sete peças corresponde a $4 \times 4 = 16$ cm^2. Metade do quadrado corresponde aos triângulos 1 e 2, que são congruentes e, portanto, cada um tem 4 cm^2 de área.

Note que os triângulos 3 e 5 também possuem mesma área, e a soma de suas áreas resulta na área do quadrado 4. Como o lado do quadrado 4 corresponde a metade da base do triângulo 1, é fácil ver que a área da região 4 é igual a 2 cm^2 e que os triângulos 3 e 5 possuem 1 cm^2 de área cada.

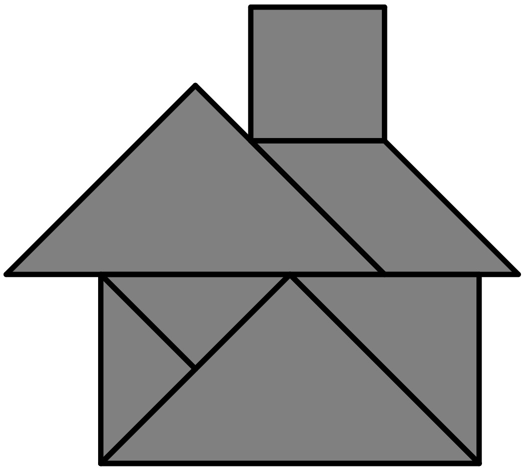
O triângulo 7 possui base e altura correspondentes à metade do lado do quadrado, portanto sua área é igual a $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ cm^2. Por fim, para completar a área total do quadrado do Tangram, a área do paralelogramo 6 corresponde a 2 cm^2. Em resumo, as áreas de cada região são as seguintes:

- Região 1: 4 cm^2
- Região 2: 4 cm^2
- Região 3: 1 cm^2
- Região 4: 2 cm^2
- Região 5: 1 cm^2
- Região 6: 2 cm^2
- Região 7: 2 cm^2
- Área do Tangram: 16 cm^2

[1]Pesquise sobre a história do Tangram!

(b) A resposta correta esperada pela coordenação é de que a área da casa possui a mesma área do Tangram da figura 1, que é 16 cm^2. No entanto, o enunciado deste item não deixou suficientemente claro que o jovem usou as mesmas peças da Figura 1 para compor a Figura 2. Os estudantes que afirmaram que as dimensões da Figura 2 não são conhecidas, mas que a área total corresponde à área de um Tangram, terão pontuação total quanto à pergunta da área. A Equipe OPM pede desculpas pelo equívoco.

Já para o desenho da casa, uma solução proposta é a seguinte:



Acredite, existem outras formas de reproduzir a mesma figura!