



Preencha seus dados corretamente e siga as orientações dos fiscais.
Entendam que os fiscais são boas pessoas, mas não poderão tirar dúvidas matemáticas ou interpretativas sobre enunciados.
No mais, esperamos que você se divirta bastante. **Boa prova!**

Estudante: _____

Instituição: _____ Série: _____

Nível 3 - Problemas

1. (20 pontos) Observe o padrão abaixo:

1ª linha: 1
2ª linha: 2 2
3ª linha: 3 4 3
4ª linha: 4 6 6 4
5ª linha: 5 8 9 8 5
6ª linha: 6 10 12 12 10 6
 : : : : :
 : : : : :

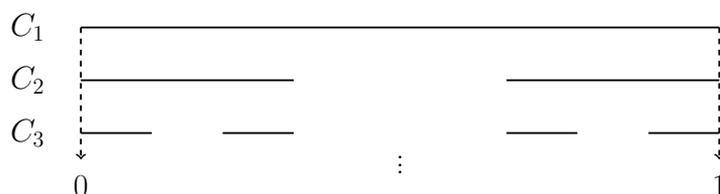
(a) Seguindo o padrão, escreva as três próximas linhas.

(b) Em qual linha o número 2018 aparecerá escrito pela primeira vez?

(c) Mostre que existe um quadrado perfeito em todas as linhas ímpares.

2. (20 pontos) Um cientista, estudando compostos antibióticos em uma amostra de bactérias, realizou o seguinte experimento: com o auxílio de um microscópio, ele espalhou toda a amostra de bactérias no intervalo $[0, 1]$ da reta, denotando-a por C_1 .

Logo após, ele aplicou o composto e observou que a terça parte central (sem remover as extremidades) desapareceu e denotou os intervalos remanescentes por C_2 . Novamente, aplicando o composto, ele notou que a terça parte central (sem as extremidades) de cada um dos dois intervalos de reta que constituem C_2 tinha desaparecido. E o que sobrou seria denotado por C_3 . Esse processo pode ser continuado indefinidamente, sempre removendo, em cada estágio, a terça parte central de cada segmento da união de intervalos C_n para formar C_{n+1} .



(a) Na figura acima, indique os números nas extremidades dos segmentos em C_1 , C_2 e C_3 .

(b) Quais dentre os pontos $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{81}$ e $\frac{4}{81}$ pertencem ao conjunto de intervalos C_3 ?

(c) Quais são os comprimentos das uniões de intervalos C_3 , C_4 e C_5 ? Determine uma expressão para o comprimento da união C_n .

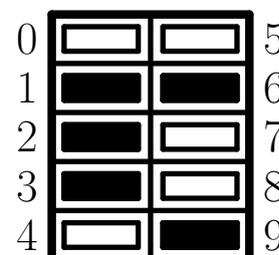


3. (20 pontos) Um cadeado com 10 botões pode ser aberto apertando, em qualquer ordem, os **cinco botões corretos**. Cada botão só pode ser apertado uma vez, ou não ser apertado. Na figura abaixo, a combinação correta para desbloquear o cadeado é $\{1, 2, 3, 6, 9\}$, cujos botões estão pintados de preto.

(a) Quantas combinações de senhas com 5 botões existem?

(b) Uma versão aprimorada do cadeado permite que o usuário escolha senhas com no mínimo um botão e no máximo nove botões. Quantas senhas **a mais** essa nova versão permite?

(c) Qual é a probabilidade de uma senha com sete dígitos não conter o número 7?



4. (20 pontos) César propôs o seguinte jogo para seu amigo Fabiano:

(i) O primeiro a jogar escreve no quadro um número inteiro entre 2 e 9;

(ii) Depois disso, alternadamente, o próximo a jogar soma um natural de 2 a 9 ao número escrito anteriormente;

(iii) Perde quem escrever um número igual ou superior a 50.

Sabendo que César será o primeiro a jogar, responda:

(a) Existe uma estratégia que César pode utilizar para ganhar sempre. Tente descobri-la.

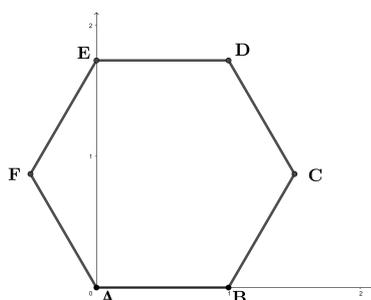
(b) Fabiano, incomodado com as condições iniciais, propôs duas alterações nas regras:

(ii)' Depois disso, alternadamente, o próximo a jogar **multiplica** o número escrito anteriormente por um natural de 2 a 9.

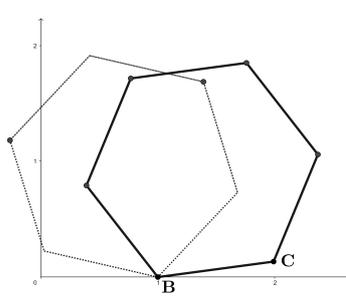
(iii)' Perde quem escrever um número igual ou superior a 500.

César aceitou, desde que continuasse sendo o primeiro a jogar. Neste novo cenário, Fabiano pode garantir a vitória? Justifique.

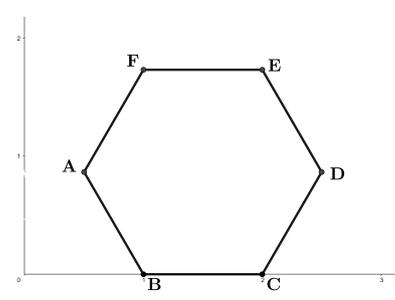
5. (20 pontos) Um hexágono $ABCDEF$ de lado 1 se encontra com um dos seus lados sobre o eixo X . Inicialmente o ponto A se encontra sobre a origem do eixo cartesiano, e o ponto B sobre o ponto $(1, 0)$. O hexágono começa a rolar sobre o eixo X para a direita de modo que, a cada minuto, o hexágono se encontra sobre a próxima base.



Minuto 0



Entre os minutos 0 e 1



Minuto 1

(a) Determine as coordenadas do ponto A nos minutos 1, 2, 3 e 4.

(b) Determine o comprimento da curva que o ponto A descreve do minuto 0 ao 5.