Nível 3 - Resolução e comentários

Problema 1. *João e Joémerson criaram um jogo com as seguintes regras:*

(i) São escritos os números de 1 a 20 em um papel;

(ii) Alternadamente, cada jogador risca um, dois ou três números consecutivos, por exemplo, {1}, {10, 11, 12}, {17, 18} e etc. Cada número pode ser riscado uma única vez;

(iii) Ganha quem riscar o último número.

Sabendo que João é o primeiro a jogar, mostre uma estratégia para que ele possa ganhar sempre.

Solução do problema 1. João começa tirando os números 10 e 11. Considere os conjuntos $A = \{1, \ldots, 9\}$ e $B = \{12, \ldots, 20\}$, ambos com 9 elementos cada. A partir da jogada de Joémerson, cada jogador só poderá efetuar sua jogada retirando elementos de apenas um dos conjuntos. Basta então João adotar uma estratégia simétrica em relação à Joémerson, por exemplo:

- se Joémerson tirar 13 e 14, João retira 2 e 3;
- se Joémerson retirar 1, 2 e 3, João retira o 12, 13 e o 14.

e assim sucessivamente, de modo que João sempre ganhará.

Problema 2. *Sabendo que os polinômios* $x^2 + ax + 2017$ *e* $x^2 + bx + 2018$ *possuem raízes inteiras positivas e possuem uma raiz em comum, determine* a *e* b.

Solução do problema 2. Para a resolução deste problema, usaremos os fatos e relações a seguir:

- Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio com coeficientes reais (ou mesmo complexos) e sejam $r_1, \ldots, r_n$ suas raízes (distintas ou não). Então:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \ldots + r_n &= -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{n-1}r_n &= +\frac{a_2}{a_0} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n &= -\frac{a_3}{a_0} \\ &\vdots \\ r_1r_2\cdots r_n &= (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

Para o caso de um polinômio de segundo grau $x^2 + nx + p$, as Relações de Girard se resumem a

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -n \\ r_1r_2 &= p \end{aligned}$$

- Se m é um inteiro maior que 1 e não é primo, então possui um divisor primo menor ou igual a $\sqrt{m}$.

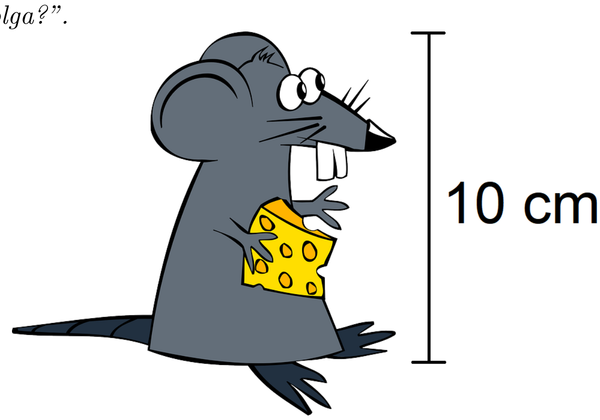
Sejam r e s as raízes do polinômio $x^2 + ax + 2017$ e r e t as raízes do polinômio $x^2 + bx + 2018$.

Pelas relações de Girard, temos que

$$\begin{cases} r \times s &= 2017 \\ r + s &= -a \\ r \times t &= 2018 \\ r + t &= -b. \end{cases}$$

Temos que 2017 não é divisível por nenhum primo até $\sqrt{2017} \approx 45$, ou seja, 2017 é primo. Assim, temos necessariamente $r = 1$ ou $r = 2017$. Como 2017 não divide 2018, temos que $r = 1$. Portanto, $s = 2017$ e $t = 2018$.
Logo, $a = -2018$ e $b = -2019$.

Problema 3. *Enquanto estudava para OPM, Marcos se deparou com o seguinte problema: "Usando apenas a imaginação pense numa laranja e enlace-a pelo equador de forma bem justa. Depois, pegue o fio, estenda-o e aumente* 1 *metro no comprimento obtido. Faça outro círculo com o novo comprimento do fio e enlace a laranja de novo. Você acha que pela folga que ficou passaria um rato? Não responda ainda, seria muito fácil. Antes, vamos repetir o problema, apenas trocando a laranja por uma bola um pouco maior: a Terra. Circunde-a pela linha do equador e aumente o comprimento obtido em* 1 *metro. Enlace-a de novo e responda: um rato em pé, que possui 10 cm de altura, passaria pela folga?".*



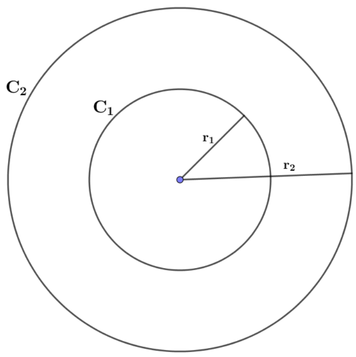
Usando apenas artifícios matemáticos, ajude Marcos a chegar numa solução.
Informação: *O raio da Terra é* 6400 *km, aproximadamente.*

Solução do problema 3. Vamos tratar o problema de uma forma genérica.

Seja C_1 uma circunferência de raio r_1 e L_1 o comprimento, em metros, de C_1. Temos então que

$$L_1 = 2\pi r_1 \Longrightarrow r_1 = \frac{L_1}{2\pi}.$$

Acrescentando um metro ao comprimento, obtemos um novo comprimento $L_2 = L_1 + 1$. Sejam C_2 a circunferência com mesmo centro de C_1 e comprimento L_2, e r_2 seu raio.



A "folga" procurada é o valor de $r_2 - r_1$. Notemos que

$$L_1 + 1 = L_2 = 2\pi r_2 \Longrightarrow r_2 = \frac{L_1 + 1}{2\pi}.$$

Portanto, temos que

$$r_2 - r_1 = \frac{L_1 + 1}{2\pi} - \frac{L_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\text{m} > \frac{1}{8}\text{m} = 12,5\text{cm} > 10\text{cm}.$$

Isto mostra que a folga obtida independe se o procedimento descrito foi feito numa laranja ou num planeta. Assim, o rato passaria sim pela folga tanto da laranja quando na folga da Terra. Perceba que a informação do valor do raio da Terra não é necessária.

Problema 4. *Pierre de Fermat, matemático amador do século 17 responsável por um dos problemas mais famosos da matemática (O último teorema de Fermat, pesquise por ele após a prova), tem seu nome em vários teoremas como forma de homenagem. Um exemplo é o conhecido "Pequeno Teorema de Fermat", que diz que*

se $p > 0$ é um número primo que não divide o número inteiro a, então o resto da divisão de a^{p-1} por p é 1.

(a) *Calcule o resto da divisão de* 2015^{2017} *por 2017.*

(b) *Mostre que* $2015^{2017} + 2016^{2018} + 2018^{2016}$ *é divisível por 2017.*
(Sugestão: Lembre-se, por exemplo, que $2016 = 2017 - 1$ *e use o binômio de Newton)*

Solução do problema 4. Fundamentaremos esta resolução nas seguintes propriedades:

- Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m = nq + r, \text{ com } 0 \leq r < |n|.$$

  Dizemos que n divide m (ou m é divisível por n) quando $r = 0$.

- Se m é um inteiro maior que 1 e não é primo, então possui um divisor primo menor ou igual a $\sqrt{m}$.

- Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

(a) Notemos inicialmente que 2017 é primo. De fato, temos que $\sqrt{2017} < 45$ e como 2017 não é divisível por nenhum primo até 45, segue que 2017 é primo. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, o resto de 2015^{2016} na divisão por 2017 é 1. Assim, podemos escrever

$$2015^{2016} = 2017m + 1 \text{ para algum } m \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $2015^{2017} = 2015^{2016} \times 2015 = 2017 \times (2015m) + 2015$. Concluímos assim que o resto de 2015^{2017} na divisão por 2017 é 2015.

(b) Através do binômio de newton, podemos escrever

$$\begin{aligned}
2016^{2018} &= (2017-1)^{2018} \\
&= \sum_{k=0}^{2017} \binom{2018}{k} \times 2017^k \times (-1)^{2018-k} \\
&= (-1)^{2018} + \sum_{k=1}^{2018} \binom{2017}{k} \times 2018^k \times (-1)^{2018-k}.
\end{aligned}$$

Cada parcela do somatório $\sum_{k=1}^{2018} \binom{2018}{k} \times 2017^k \times (-1)^{2018-k}$ está acompanhado de uma potência de 2017. Assim, o somatório $\sum_{k=1}^{2018} \binom{2018}{k} \times 2017^k \times (-1)^{2018-k}$ é divisível por 2017. Logo, podemos escrever 2016^{2018} como

$$2016^{2018} = 2017x + (-1)^{2018} = 2017x + 1$$

para algum $x \in \mathbb{Z}$.

Da mesma forma, através do binômio de Newton, podemos escrever $2018^{2016} = (2017+1)^{2016} = 2017y + 1$ para algum $y \in \mathbb{Z}$.

Já pelo item (a), podemos escrever $2015^{2017} = 2017z + 2015$ para algum $z \in \mathbb{Z}$.

Portanto, somando temos que

$$2015^{2017} + 2016^{2018} + 2018^{2016} = 2017(x+y+z) + 1 + 1 + 2015 = 2017(x+y+z+1).$$

Uma outra solução é possível usando congruências lineares:

$$\begin{aligned}
2016^{2018} &\equiv (-1)^{2018} \equiv 1 \pmod{2017} \\
2018^{2016} &\equiv 1^{2016} \equiv 1 \pmod{2017}.
\end{aligned}$$

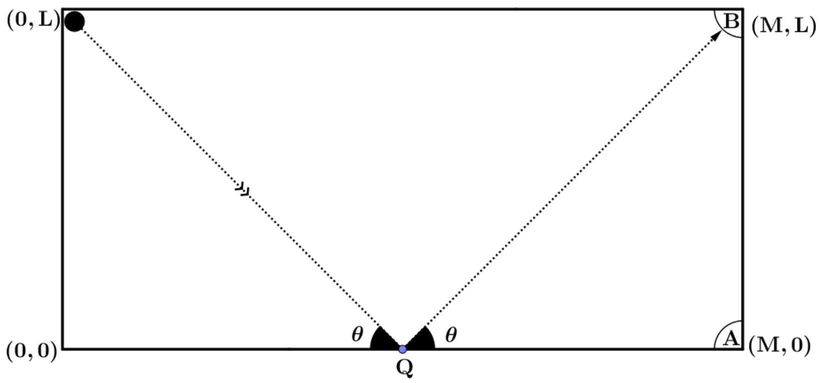
Pelo item (a), temos que $2015^{2017} \equiv 2015 \pmod{2017}$. Logo,

$$2015^{2017} + 2016^{2018} + 2018^{2016} \equiv 2015 + 1 + 1 \equiv 2017 \equiv 0 \pmod{2017}.$$

Problema 5. *Uma* sinuca matemática *é composta por um retângulo no plano cartesiano delimitado pelos pontos* $(0,0), (M,0), (M,L)$ *e* $(0,L)$ *com* $L, M > 0$, *um "bolão" situado no ponto* $(0,L)$ *e duas caçapas (buracos) nos pontos* $A = (M,0)$ *e* $B = (M,L)$.

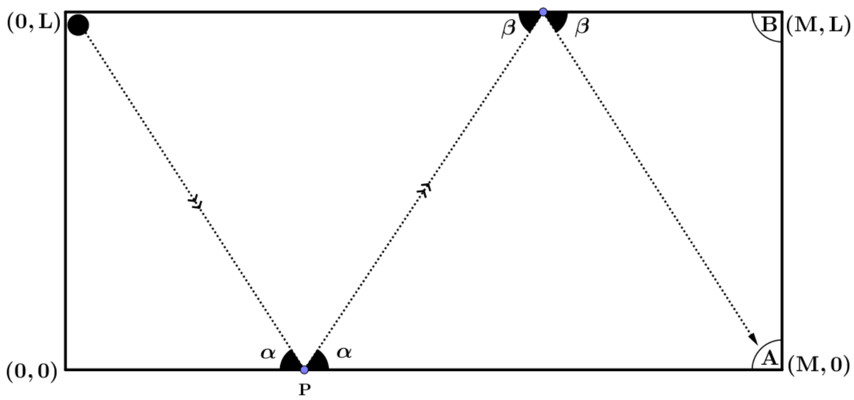
Um matemático brinca na sinuca tentando colocar o bolão nos pontos $A = (M,0)$ *e* $B = (M,L)$, *mas com a condição de que o bolão só pode tocar os segmentos horizontais. Assuma que as trajetórias da bola são retas e, além disso, que os ângulo de incidência e de reflexão são iguais. (veja o exemplo abaixo)*

Por exemplo, Fermat consegue acertar o bolão na caçapa B *com apenas um reflexo, mirando no ponto* Q *como exemplifica a figura abaixo.*



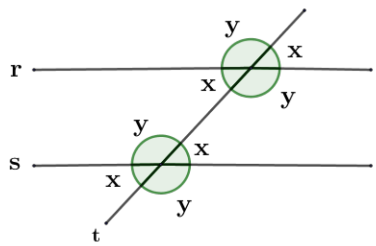
Os ângulos θ destacados acima são os ângulos de incidência e reflexão citados anteriormente. Através de cálculos simples, Fermat verificou que as coordenadas do ponto Q são $\frac{M}{2}$ e 0, ou seja, $Q = \left(\frac{M}{2}, 0\right)$.

(a) *A figura abaixo representa o percurso feito pelo bolão quando ele é refletido exatamente duas vezes e cai na caçapa A. Determine as coordenadas do ponto P.*

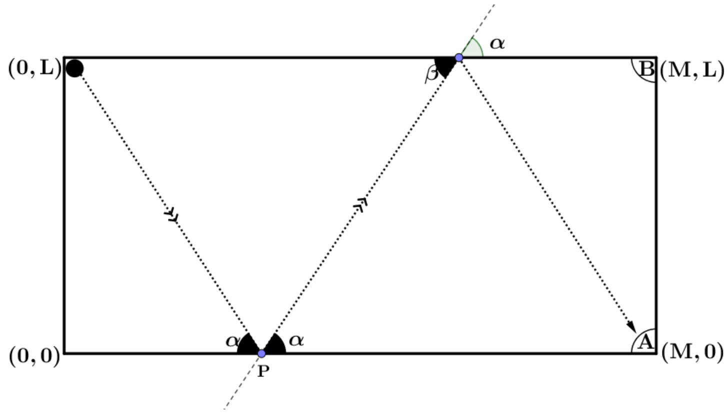


(b) *Para cada n inteiro positivo, determine as coordenadas do primeiro ponto de reflexão do bolão e em que caçapa o bolão caiu, sabendo que antes de cair, o bolão foi refletido exatamente n vezes (no total).*

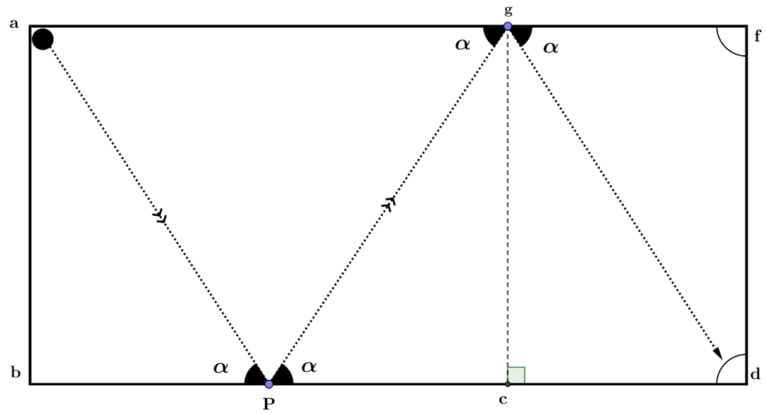
Solução do problema 5. Retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos congruentes, como mostra a figura abaixo:



(a) Inicialmente, notamos que pela propriedade exibida acima podemos concluir que $\beta = \alpha$ como assinalado na figura:



Podemos então considerar a seguinte figura:



Temos três igualdades envolvendo a tangente de α:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{ab}}{\overline{bp}}; \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{gc}}{\overline{pc}}; \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{fd}}{\overline{fg}}.$$

Como $\overline{ab} = \overline{gc} = \overline{fd} = L$, então $\overline{bp} = \overline{pc} = \overline{fg}$.
Além disso, temos ainda que $\overline{fg} = \overline{cd}$. Desta forma, concluimos que

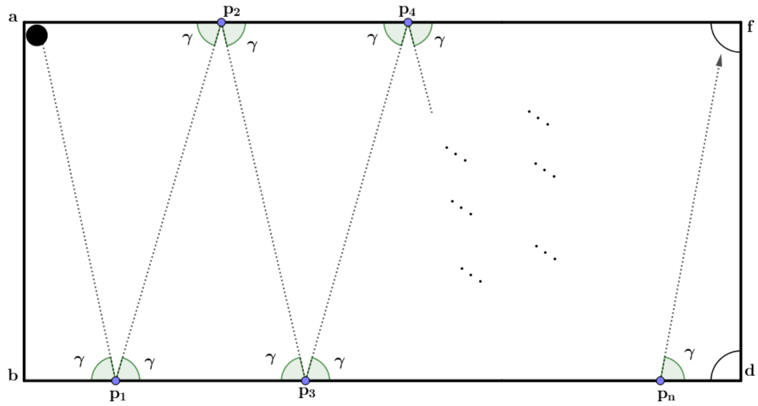
$$\overline{bp} = \overline{pc} = \overline{cd}.$$

Portanto, o ponto P situa-se no primeiro terço do segmento bd, ou seja,

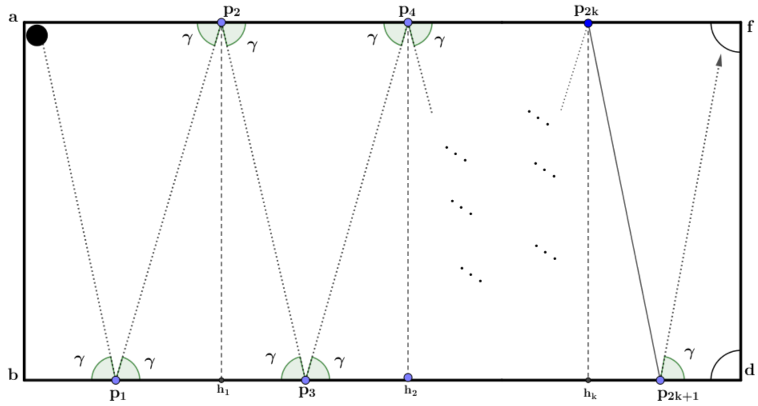
$$P = \left(\frac{M}{3}, 0\right).$$

(b) Notamos que o primeiro reflexo é no segmento horizontal de baixo; o segundo reflexo é no segmento horizontal de cima; .... Portanto

- se n é ímpar, $n = 2k + 1$, o último ponto de reflexo é no segmento de baixo e, portanto, a bola só pode ter caído na caçapa B. Através de uma repetição do argumento usado no item (a), podemos concluir que os ângulos de reflexão são todos iguais. Vejamos a figura seguinte:



De modo análogo ao item (a) podemos chegar na figura seguinte



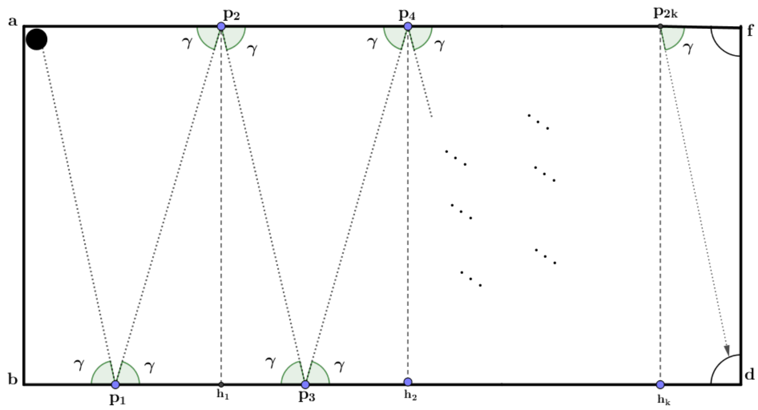
e concluir que

$$\overline{bp_1} = \overline{p_1h_1} = \overline{h_1p_3} = \overline{p_3h_2} = \ldots = \overline{h_kp_{2k+1}}.$$

Portanto, o segmento bd fica dividido em $2k+2 = n+1$ partes iguais. Logo, as coordenadas do ponto p_1 são

$$p_1 = \left(\frac{M}{n+1}, 0\right).$$

– se n é par, $n = 2k$, temos o seguinte:



De maneira inteiramente análoga, temos

$$p_1 = \left(\frac{M}{n+1}, 0\right).$$

Clique aqui para visitar a página da OPM no Facebook (ou digite https://www.facebook.com/opmufpb/?fref=ts no seu navegador) e fique por dentro de todas as novidades da OPM e visite o nosso site **clicando aqui** (ou digite http://www.mat.ufpb.br/opm/ no seu navegador) para conferir a lista de premiados, provas anteriores e muito mais!