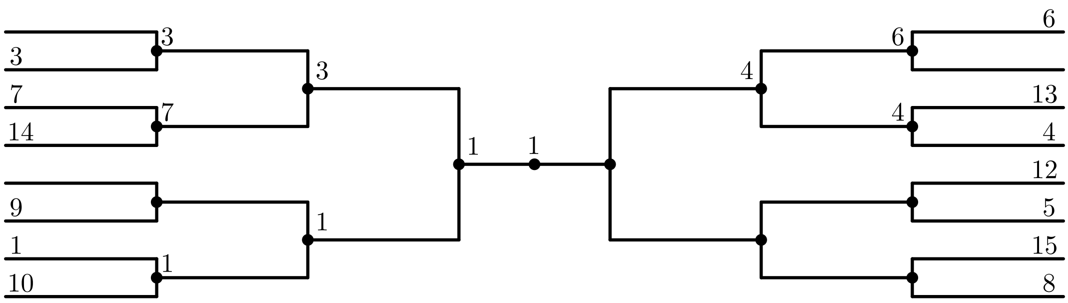
Nível 2 - Resolução e comentários

Problema 1. *Um torneio de xadrez é realizado entre dezesseis competidores, ranqueados de 1 a 16 de acordo com suas habilidades: o enxadrista número 1 é o melhor entre todos eles, o enxadrista número 2 é o segundo melhor e assim sucessivamente. Neste torneio não há empates e, em cada duelo,* ***o vencedor é sempre o jogador melhor ranqueado****, ou seja, não há "zebras" (situações onde um enxadrista derrota outro considerado melhor). Quem perde é eliminado e quem vence avança para a próxima fase, até que haja um campeão, o enxadrista 1.*

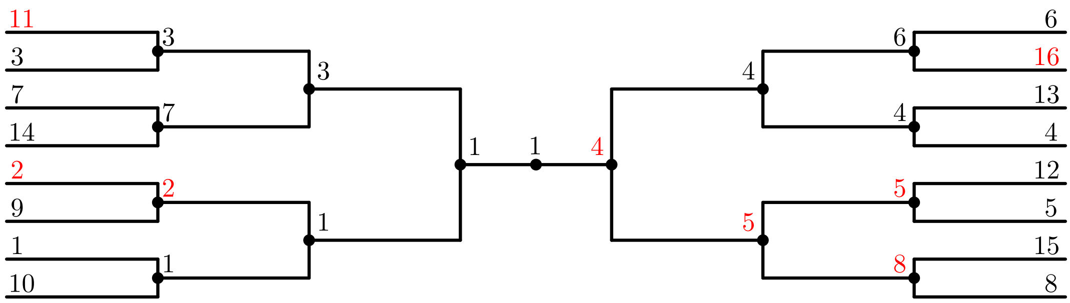
a) *Na tabela abaixo, de uma edição anterior do torneio, cada número representa um enxadrista de acordo com seu ranking, os pontos representam duelos e o vencedor é colocado ao lado do respectivo ponto (exemplo: o enxadrista 7 venceu o enxadrista 14, mas perdeu para o enxadrista 3 na fase seguinte). O ponto central representa o vencedor da final. Alguns números estão apagados. Preencha as lacunas corretamente.*

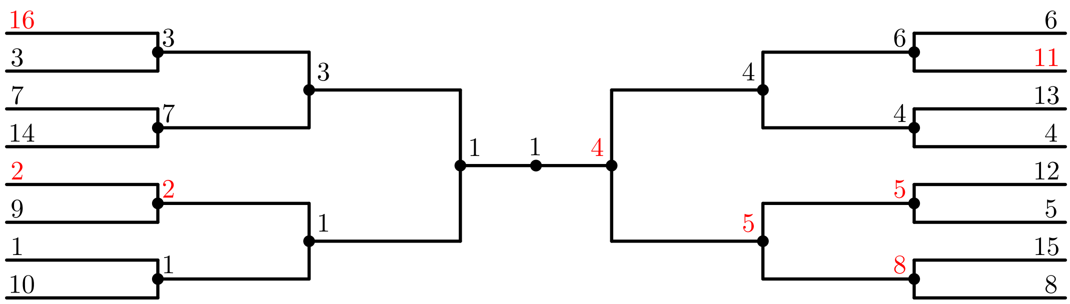


b) *Qual é o enxadrista de ranking mais baixo que pode chegar à final de um torneio cujo sorteio ainda será realizado? Justifique.*

Solução do problema 1. O principal cuidado necessário para resolver esta questão é entender bem a ideia de um ranqueamento: menores números correspondem a melhores desempenhos. O chaveamento do item a) ajuda a deixar bem clara essa ideia. Propositalmente, foi elaborado um chaveamento onde o enxadrista número 2 não chega à final, ajudando a quebrar a intuição de que os dois melhores enxadristas sempre farão a final. Além disso, o chaveamento representado com oito enxadristas à esquerda e oito enxadristas à direita permite visualizar com mais facilidade a resposta correta para o item b), já que a final será disputada entre os melhores enxadristas de cada lado do chaveamento.

a) O enxadrista 5 derrota o enxadrista 12 e o enxadrista 8 derrota o enxadrista 15. Na fase seguinte, o enxadrista 5 derrota o enxadrista 8. A seguir, o enxadrista 4 derrota o enxadrista 5 e avança à final do torneio. Analisando o resto, note que, na primeira fase, temos 8 duelos e três incógnitas: o enxadrista 2, o enxadrista 11 e o enxadrista 16. Note que um deles enfrenta **e perde** para o enxadrista 6. Portanto, o único cenário que não pode ocorrer é o enfrentamento com o enxadrista 2 nesta fase. Agora, perceba que um deles enfrenta **e perde** o enxadrista 3, mesma situação do cenário anterior. O enxadrista 2, então, derrota o enxadrista 9 e perde para o enxadrista 1 na fase seguinte. As lacunas a serem preenchidas estão em vermelho na figura abaixo. Perceba que a tabela pode ser completada de duas maneiras, visto que os enxadristas 11 e 16 acabam perdendo logo na primeira rodada.





b) A figura do enunciado pode ser de grande valia na resolução deste item. Note que há oito enxadristas distribuídos em cada lado do chaveamento. Seja n o número do enxadrista. Se $n = 1$, este enxadrista derrotará qualquer outro competidor e será o campeão. Caso contrário, ele perderá para TODOS os enxadristas de número entre 1 e $n - 1$, mas derrotará TODOS os enxadristas de número entre $n + 1$ e 16 (o enxadrista 16 é o único que não poderá derrotar ninguém). Sendo assim, **se os oito melhores enxadristas estiverem no mesmo lado da chave, o enxadrista 9 será o melhor de sua chave**, chegando à decisão do torneio. Portanto, o enxadrista de *ranking* mais baixo que pode chegar à final é o enxadrista 9.

Problema 2. *Aline e Saul viajaram até o país fictício chamado Miramaristão, cuja moeda oficial é o miramar. Neste país, só existem cédulas de* 1 *miramar,* 3 *miramares,* 9 *miramares,* 27 *miramares e* 81 *miramares. Ao passar por uma praça, Aline e Saul avistaram um homem vendendo um automóvel por* 149 *miramares e fazendo a seguinte oferta: "Se vocês me apresentarem* 20 *cédulas que somem exatamente* 149 *miramares, eu lhes darei o automóvel gratuitamente!"*

a) É possível que Aline e Saul tenham ganhado o automóvel?

b) Suponha que Aline e Saul estavam dispostos a comprar o automóvel. Sabendo que o vendedor não tinha troco, qual é a quantidade mínima de cédulas que eles teriam que entregar ao vendedor?

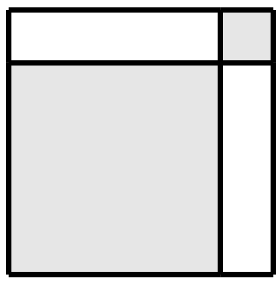
Solução do problema 2. Conhecimentos básicos de paridade (especialmente saber que a soma de um número par de termos ímpares resulta em um número par) são suficientes para resolver o item a). Na resposta do item b), é descrito um algoritmo que funciona em vários lugares do mundo real, inclusive em diversos caixas eletrônicos. De forma intuitiva, é o que caixas de supermercado fazem ao darem um troco com a menor quantidade possível de cédulas e moedas.

a) 1, 3, 9, 27 e 81, os possíveis valores das cédulas de Miramaristão, são números ímpares. Portanto, qualquer soma de um número par de cédulas resultará um número par. Como 149 é um número ímpar, não é possível que Aline e Saul tenham ganhado o automóvel.

b) Para obter a quantidade mínima de cédulas, é preciso ir juntando a maior quantidade possível de cédulas com os valores mais altos. O procedimento ideal para obter o número mínimo de cédulas (não só para 149, mas para qualquer valor inteiro positivo) pode ser descrito da seguinte maneira:

- Divida o valor inicial por 81. O quociente é o número de cédulas de 81 miramares que devemos possuir e o resto é o dinheiro que precisamos obter com as cédulas menores (no problema, $149 = 81 \times \boxed{1} + 68$);
- Divida o resto da divisão anterior por 27. O quociente é o número de cédulas de 27 miramares que devemos possuir e o resto é a quantidade que precisamos obter com as cédulas menores (no problema, $68 = 27 \times \boxed{2} + 14$);
- Divida o resto da divisão anterior por 9. O quociente é o número de cédulas de 9 miramares que devemos possuir e o resto é a quantidade que precisamos obter com as cédulas menores (no problema, $14 = 9\times\boxed{1}+5$);
- Divida o resto da divisão anterior por 3. O quociente é o número de cédulas de 3 miramares que devemos possuir e o resto é a quantidade de cédulas de 1 miramar necessários para completar o montante pedido (no problema, $5 = 3 \times \boxed{1} + \boxed{2}$);
- Some todos os quocientes obtidos no processo com o resto da última divisão feita (números destacados nesta resolução). O resultado é o menor número de cédulas para se obter o montante. No problema, este número é igual a $1+2+1+1+2 = \boxed{7 \text{ cédulas}}$ (uma de 81 miramares, duas de 27 miramares, uma de 9 miramares, uma de 3 miramares e duas de 1 miramar).

Problema 3. *Miriam tem um terreno quadrado com 53 metros de lado. Ela dividiu o terreno em quatro regiões, como representado na figura ao lado: duas regiões quadradas, com um ponto em comum, e duas regiões retangulares de áreas iguais. Sabendo que a soma das áreas em cinza é 2017 m^2, responda:*



a) Quais são as medidas dos lados dos quadrados sombreados?

b) Qual é a área de cada uma das quatro regiões?

Solução do problema 3. Apesar do que a figura sugere, este não é, propriamente, um problema de geometria, sendo necessários apenas conhecimentos básicos de equações de 1º e 2º grau e sistemas de equações. Embora uma das equações do sistema seja uma equação não-linear, ela pode ser transformada em uma equação do segundo grau com uma variável através de uma substituição. Não explicitaremos um método para resolver a equação porque não há uma única maneira de resolvê-la (nem sempre a Fórmula de Bhaskara é o melhor caminho). O item b) é resolvido com aplicações das fórmulas para o cálculo de áreas de quadrados e de retângulos.

a) Sejam x e y os lados dos quadrados menores. Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} (1): x + y = 53 \\ (2): x^2 + y^2 = 2017 \end{cases}$$

De (1), temos $y = 53 - x$. Substituindo esta relação em (2), temos:

$$x^2 + (53-x)^2 = 2017 \Longrightarrow 2x^2 - 106x + 792 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 9, \text{ que implica } y = 44; \\ x = 44, \text{ que implica } y = 9. \end{cases}$$

De todo modo, os lados dos quadrados menores medem 44 metros e 9 metros.

b) Temos um quadrado de lado igual a 44 metros e, portanto, com área igual a $44 \times 44 = 1936$ m^2, um quadrado de lado igual a 9 metros e área igual a $9 \times 9 = 81$ m^2 e dois retângulos (onde dois lados possuem 44 metros cada e os outros dois possuem 9 metros cada) com área igual a $44 \times 9 = 396$ m^2 cada.

Observação. Outra maneira válida para calcular as áreas em branco na figura é fazer a diferença entre a área do quadrado maior ($53 \times 53 = 2809$ m^2) e a soma das áreas dos quadrados menores, que é dada no enunciado (2017 m^2). A área de cada região corresponde à metade da diferença obtida.

Problema 4. *O CPF, Cadastro de Pessoas Físicas, é um documento de identificação pessoal, cuja numeração é dada na forma* $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}\boxed{F}\boxed{G}\boxed{H}\boxed{I} - \boxed{J}\boxed{K}$*, onde* $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ *e* K *são algarismos de 0 a 9, inclusive. O algarismo* J *é chamado de* **1º dígito verificador** *e* K *é chamado de* **2º dígito verificador**, *pois eles servem para evitar fraudes ou erros de digitação. O procedimento para gerar um CPF é o seguinte:*

(i) Os algarismos de A *a* I *não podem ser todos iguais e podem ser atribuídos livremente, no sentido de que não há qualquer outra dependência matemática entre eles;*

(ii) Para determinar o algarismo J*, calculamos a soma* S_1 *a seguir:*

$$S_1 = 10A + 9B + 8C + 7D + 6E + 5F + 4G + 3H + 2I.$$

Se o resto r_1 *da divisão de* S_1 *por* 11 *for* 0 *ou* 1*, então colocamos* $J = 0$*. Caso contrário, colocamos* $J = 11 - r_1$*.*

(iii) Para determinar o algarismo K*, calculamos a soma* S_2 *a seguir:*

$$S_2 = 11A + 10B + 9C + 8D + 7E + 6F + 5G + 4H + 3I + 2J.$$

Se o resto r_2 *da divisão de* S_2 *por* 11 *for* 0 *ou* 1*, então colocamos* $K = 0$*. Caso contrário, colocamos* $K = 11 - r_2$*.*

a) Determine os dígitos verificadores J *e* K *para a seguinte numeração de CPF:*

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9} - \boxed{J}\boxed{K}$$

b) Por um erro de impressão, um CPF saiu com doís dígitos apagados, aqui representados por x *e* y*:*

$$\boxed{x}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{5} - \boxed{y}\boxed{8}$$

Determine a numeração completa do CPF.

Solução do problema 4. É esperado que quem execute corretamente o algoritmo descrito no enunciado resolva o item a), que inclusive já foi questão de ENEM, no ano de 2009. Já o item b) é significativamente mais desafiador, sendo necessário observar que resto das divisões de S_1 e S_2 por 11 e encontrar valores para x e y pelo método mais adequado. Nesta resolução, os valores serão encontrados por tentativa e erro, que é uma ideia natural para a maioria dos alunos.

a) Calculando S_1, obtemos o seguinte:

$$S_1 = 10 \times 1 + 9 \times 2 + 8 \times 3 + 7 \times 4 + 6 \times 5 + 5 \times 6 + 4 \times 7 + 3 \times 8 + 2 \times 9 = 210,$$

cujo resto na divisão por 11 é 1. Logo, $\boxed{J = 0}$. Calculando S_2, obtemos

$$S_2 = 11 \times 1 + 10 \times 2 + 9 \times 3 + 8 \times 4 + 7 \times 5 + 6 \times 6 + 5 \times 7 + 4 \times 8 + 3 \times 9 + 2 \times 0 = 255,$$

cujo resto na divisão por 11 é 2. Logo, $\boxed{K = 11 - 2 = 9}$.

b) Lembre que x e y são algarismos de 0 a 9. Agora, note que

$$S_2 = 11 \times x + 10 \times 2 + 9 \times 4 + 8 \times 2 + 7 \times 1 + 6 \times 3 + 5 \times 3 + 4 \times 0 + 3 \times 5 + 2 \times y = 11x + 2y + 127$$

deixa resto 3 na divisão por 11, já que o segundo dígito verificador é $8 = 11 - 3$. Perceba que a parcela $11x$ é divisível por 11, então ela não influenciará no resto da divisão de S_2 por 11. Assim, vamos ver para qual valor de y a soma $2y + 127$ deixa resto 3 na divisão por 11:

- $y = 0 \Longrightarrow 2y + 127 = 0 + 127 = 127 = 11 \times 11 + \underline{6}$. Como $6 \neq 3$, $y \neq 0$;
- $y = 1 \Longrightarrow 2y + 127 = 2 + 127 = 129 = 11 \times 11 + \underline{8}$. Como $8 \neq 3$, $y \neq 1$;
- $y = 2 \Longrightarrow 2y + 127 = 4 + 127 = 131 = 11 \times 11 + \underline{10}$. Como $10 \neq 3$, $y \neq 2$;
- $y = 3 \Longrightarrow 2y + 127 = 6 + 127 = 133 = 11 \times 12 + \underline{1}$. Como $1 \neq 3$, $y \neq 3$;
- $y = 4 \Longrightarrow 2y + 127 = 8 + 127 = 135 = 11 \times 12 + \underline{3}$. Logo, $\boxed{y = 4}$.

De fato, 4 é o único valor possível para y. Se quiser, verifique o que acontece para os demais valores até o 9.

Sabendo que o valor de y é 4, podemos concluir que o resto da divisão de S_1 por 11 é 7. Assim,

$$S_1 = 10 \times x + 9 \times 2 + 8 \times 4 + 7 \times 2 + 6 \times 1 + 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 0 + 2 \times 5 = 10x + 107$$

deixa resto 7 na divisão por 11. Vamos determinar x.

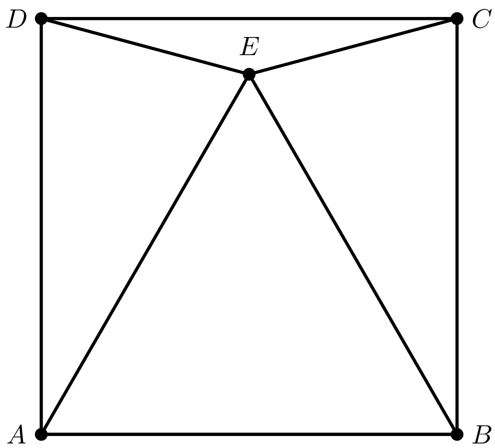
- $x = 0 \Longrightarrow 10x + 107 = 0 + 107 = 107 = 11 \times 9 + \underline{8}$. Como $8 \neq 7$, $x \neq 0$;
- $x = 1 \Longrightarrow 10x + 107 = 10 + 107 = 117 = 11 \times 10 + \underline{7}$. Assim, $\boxed{x = 1}$ (verifique que nenhum outro valor para x satisfaz nossas condições).

Portanto, a numeração do CPF deste item é $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{5} - \boxed{4}\boxed{8}$.

Problema 5. *Sílvio tem um terreno quadrado de lado x. Ele dividiu o terreno em quatro áreas triangulares conforme a figura abaixo. O triângulo ABE é equilátero.*

a) Qual é a medida, em graus, do ângulo $D\widehat{E}C$?

b) Calcule a área do triângulo DEC em função de x.



Solução do problema 5. Para resolver o item a), é necessário conhecer o Teorema do Triângulo Isósceles (um triângulo possui dois lados congruentes se, e somente se, possui dois ângulos de mesma medida) e saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Já no item b), o ponto chave é calcular a altura relativa a CD através da altura do triângulo equilátero ABE. Feito isto, basta calcular a área do triângulo pela fórmula convencional $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, onde CD é a base.

a) Note que AD e AE são congruentes, pois o triângulo ABE é equilátero. Por outro lado, AB e AD são congruentes, pois são lados do quadrado $ABCD$. Portanto, o triângulo ADE é isósceles de base DE. Perceba que $D\widehat{A}E = 30°$ (diferença entre o ângulo do quadrado e o ângulo de um triângulo equilátero). Assim, $A\widehat{D}E = A\widehat{E}D = 75°$, o que implica $C\widehat{D}E = 15°$. Analogamente, concluímos que $D\widehat{C}E = 15°$ (verifique isto!). Portanto, $D\widehat{E}C = 180° - 2 \times 15° = 150°$.

b) Sendo x o lado do quadrado, a altura do triângulo ABE é igual a $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ (verifique!), logo a altura do triângulo DEC relativa a CD é $x - \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = x\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$. Portanto, a área do triângulo DEC é igual a

$$A_{\triangle DEC} = \frac{x \times x\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{x^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Clique aqui para visitar a página da OPM no Facebook (ou digite https://www.facebook.com/opmufpb/?fref=ts no seu navegador) e fique por dentro de todas as novidades da OPM e visite o nosso site **clicando aqui** (ou digite http://www.mat.ufpb.br/opm/ no seu navegador) para conferir a lista de premiados, provas anteriores e muito mais!