Nível 1 - Resolução e comentários

Problema 1. *Certo dia, um bolo que Mariana fez com todo o amor e carinho foi comido sem autorização. Ao procurar o culpado, ela investigou Alexandre, Cássio e Raiza. Apenas um deles comeu o bolo. Cada um dos investigados fez uma afirmação:*

- ***Alexandre disse:*** *Raiza comeu o bolo.*
- ***Raiza disse:*** *Cássio não comeu o bolo.*
- ***Cássio disse:*** *Raiza não comeu o bolo.*

Sabendo que apenas uma das afirmações acima é verdadeira, quem comeu o bolo?

Solução do problema 1. O enunciado nos diz que apenas uma das afirmações ditas é verdadeira. Para resolver este problema, vamos analisar o que acontece quando supomos que determinada afirmação seja verdadeira:

- Suponha que Alexandre disse a verdade, ou seja, que "Raiza comeu o bolo". Se isso aconteceu, então a afirmação "Cássio não comeu o bolo", dita por Raiza, também seria verdadeira, o que não pode acontecer;
- Suponha, agora, que Raiza disse a verdade, isto é, "Cássio não comeu o bolo". Perceba que a afirmação "Raiza não comeu o bolo" é a negação de "Raiza comeu o bolo", então uma afirmação obrigatoriamente será verdadeira e a outra será falsa. Este cenário não é possível porque teríamos duas afirmações verdadeiras;
- Assim, a afirmação verdadeira foi dita por Cássio ("Raiza não comeu o bolo"). A afirmação de Alexandre ("Raiza comeu o bolo") e a afirmação de Raiza ("Cássio não comeu o bolo") são falsas.

Portanto, em decorrência da mentira de Raiza, Cássio comeu o bolo de Mariana.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA: As afirmações de Alexandre e de Cássio são opostas entre si, uma nega a outra. Portanto, um deles está falando a verdade e o outro está mentindo. Isso quer dizer que Raiza mentiu. Como ela falou que Cássio não comeu o bolo, concluímos que quem comeu o bolo foi Cássio.

Problema 2. *Na sequência de números:*

$$1, a_2, 2, a_4, a_5, a_6 \ldots$$

Dizemos que o primeiro termo é 1, o segundo termo é a_2, o terceiro termo é 2, assim por diante. Sabe-se que esta sequência tem 2017 termos e que cada termo, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os termos anteriores. Qual o último termo dessa sequência?

Solução do problema 2. Sabendo que a média aritmética de n números é a soma de cada um dos n termos dividida pela quantidade de números (exemplo, a média aritmética dos números 3 e 5 é $\frac{3+5}{2} = 4$), vamos usar esta definição para calcular alguns termos e verificar alguma regularidade.

Como o terceiro termo é 2 e ele é a média dos dois termos anteriores, temos $2 = \dfrac{1+a_2}{2} \Longrightarrow a_2 = 3$. O quarto termo corresponde à média aritmética dos três termos anteriores, logo $a_4 = \dfrac{1+3+2}{3} = 2$. O quinto termo é igual a $\dfrac{1+3+2+2}{2} = 2$.

Note que, se a média de n números ($n \geq 2$) é igual a 2, o $n+1^{\text{ésimo}}$ termo (leia-se termo de ordem $n+1$) será igual a 2 e assim sucessivamente. Assim, do terceiro termo em diante, todos os termos serão iguais a 2. Portanto, o 2017º termo desta sequência será igual a 2.

Nota: A afirmação acima pode ser provada por diversos métodos, alguns mais robustos, raramente vistos em salas de aula. No entanto, uma demonstração sofisticada não era necessária para fins de correção. É suficiente que o padrão seja percebido (e descrito corretamente) para que a questão seja considerada correta.

Problema 3. *Daniel brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem* 3*cm,* 4*cm e* 6*cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.*

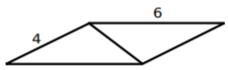


Figura I

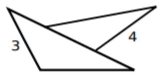


Figura II

a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?

b) Calcule os perímetros das Figuras I e II.

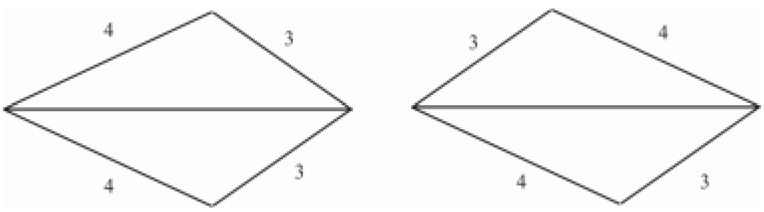
c) Qual o menor perímetro de uma figura que Daniel pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

Solução do problema 3.

a) Na figura I foram unidos dois lados que medem 3 cm. Já na figura II, foram unidos um lado de 3 cm e um lado de 6 cm.

b) Na figura I temos dois lados de 4 cm e dois lados de 6 cm, já que os dois lados de 3 cm estão unidos. Portanto, o perímetro é $6 + 4 + 6 + 4 = 20$ cm. Já na figura II, perceba que um lado de 3 cm está unido a outro de 6cm. Assim, 3 cm do lado maior contribuem para o perímetro da figura, que é $3 + 4 + (6 - 3) + 4 + 6 = 20$ cm.

c) Para obter o menor perímetro possível, devemos unir os dois lados maiores, de 6 cm. Assim, formaremos quadriláteros de perímetro $3 + 4 + 3 + 4 = 14$ cm. As duas figuras que podem ser formadas são dos seguintes tipos:



Nota: Rotações e/ou reflexões de figuras do mesmo tipo NÃO serão consideradas figuras distintas para fins de correção.

Problema 4. *Em uma reta, Belinha desenhou* 100 *pontos nas cores azul ou vermelho, sem pensar em uma ordem específica. Logo depois, Jackeline coloriu os segmentos formados entre pontos consecutivos da seguinte maneira:*

(i) Se dois pontos consecutivos são vermelhos, o segmento entre eles é pintado de vermelho;

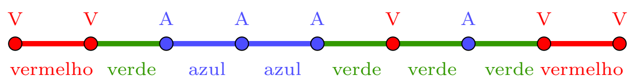
(ii) Se dois pontos consecutivos são azuis, o segmento entre eles é pintado de azul;

(iii) Se dois pontos consecutivos têm cores distintas, o segmento entre eles é pintado de verde.

Depois de pintar todos os segmentos, Jackeline percebeu que pintou exatamente 20 *segmentos de verde. Se o ponto mais à esquerda desenhado por Belinha é vermelho, qual é a cor do ponto desenhado mais à direita?*

Solução do problema 4. Vamos considerar a reta até o momento em que Jackeline pintou o primeiro segmento verde, da esquerda para a direita. Se o ponto mais à esquerda é vermelho, então o primeiro segmento verde terminou em um ponto azul. Agora, considere o segmento entre o primeiro ponto azul e o final do segundo segmento pintado de verde por Jackeline. Como o primeiro segmento acabou em um ponto azul, o segundo segmento acabará em um ponto vermelho. Continuando o raciocínio acima, o terceiro segmento verde terminará em um ponto azul, o quarto segmento terminará em um ponto vermelho e assim sucessivamente. Como o número de segmentos verdes pintados por Jackeline é par, o ponto à direita do vigésimo segmento é vermelho. Portanto, a cor do ponto pintado mais à direita é vermelho.

Nota: Novamente, aqui temos a percepção de um padrão como uma ideia chave para a resolução do problema. Por que o ponto mais à direita não pode ser azul, já que o ponto mais à esquerda é vermelho? Porque um ponto azul à direita de um segmento verde implica em um número ímpar de segmentos verdes pintados. O padrão pode ser percebido com mais facilidade quando se esboça uma representação da situação retratada no problema. Na figura abaixo, as letras maiúsculas indicam as cores dos pontos (V para vermelho e A para azul) e as palavras em minúsculo representam as cores dos segmentos entre dois pontos.



Problema 5. *Na soma abaixo, cada letra representa um dígito diferente de zero e letras distintas representam dígitos distintos. Qual é o valor de R?*

$$\begin{array}{ccccc} & R & O & M & A \\ + & A & M & O & R \\ \hline & M & O & R & O \end{array}$$

Solução do problema 5. Para resolver este problema, é preciso visualizar a soma representada em letras como uma soma usual feita com números. Em alguns casos, utilizamos o "vai um" quando a soma de dois algarismos é maior que 10. Perceba que a soma de dois números quaisquer de um algarismo pode ser, no máximo, 18 (correspondente a $9+9$). Se a soma de dois números é menor que 10, não "passamos um número para a esquerda". Caso a soma seja maior que 10, escrevemos embaixo o dígito das unidades da soma e "passamos uma unidade à esquerda". Iniciaremos a resolução pela soma dos números que representam as centenas.
Na soma das centenas, temos $O + M = O$, o que só é possível quando $M = 0$ ou quando $M = 9$ e somamos uma unidade vinda das dezenas. Como todas as letras são diferentes de 0, temos $\boxed{M = 9}$ e, substituindo na soma original, obtemos o seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle 1} & & \\ & R & O & 9 & A \\ + & A & 9 & O & R \\ \hline & 9 & O & R & O \end{array}$$

Note a soma das unidades e a soma das unidades de milhar. Temos $A+R=O$ somado ao *valor somado às dezenas* e $R+A=9$ mais o *valor vindo das centenas.* Como $A+R=R+A$, então temos duas possibilidades: $O=9$ e $O=8$, com um número vindo das centenas. Mas letras distintas representam números distintos, logo $O \neq 9$. Assim, $\boxed{O=8}$ e agora temos o seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} & {}^{1} & {}^{1} & & \\ & R & 8 & 9 & A \\ + & A & 9 & 8 & R \\ \hline & 9 & 8 & R & 8 \end{array}$$

Compare a soma das dezenas e a soma das centenas. Nas centenas, temos $8+9+1=18=10+8$, onde o 1 vem do fato de a soma das dezenas ser maior que 10, o 8 foi o número escrito nas centenas e as 10 centenas foram somadas às unidades de milhar. Como nas dezenas somamos 8 e 9, temos duas possibilidades: $R=8$ ou $R=7$. Como $R \neq O = 8$, a única possibilidade é $\boxed{R=7}$.

Nota: Perceba que o problema foi resolvido sem ser necessário calcular o valor de A. É fácil ver que $\boxed{A=1}$ e a soma analisada é

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 8 & 9 & 1 \\ + & 1 & 9 & 8 & 7 \\ \hline & 9 & 8 & 7 & 8 \end{array}$$

Clique aqui *para visitar a página da OPM no Facebook (ou digite https://www.facebook.com/opmufpb/?fref=ts no seu navegador) e fique por dentro de todas as novidades da OPM e visite o nosso site* **clicando aqui** *(ou digite http://www.mat.ufpb.br/opm/ no seu navegador) para conferir a lista de premiados, provas anteriores e muito mais!*