Nível 3 - Problemas

Problema 1. João e Joémerson criaram um jogo com as seguintes regras:

(i) São escritos os números de 1 a 20 em um papel;

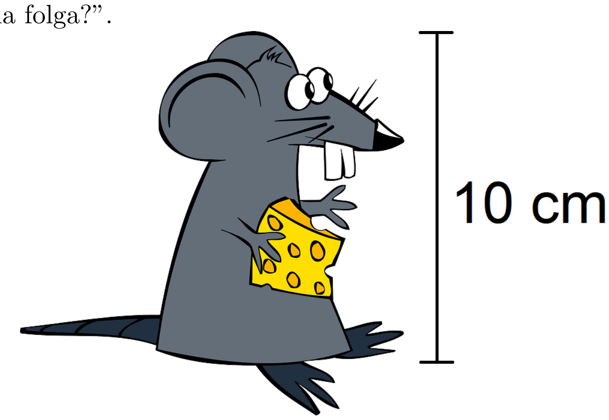
(ii) Alternadamente, cada jogador risca um, dois ou três números consecutivos, por exemplo, $\{1\}$, $\{10, 11, 12\}$, $\{17, 18\}$ e etc. Cada número pode ser riscado uma única vez;

(iii) Ganha quem riscar o último número.

Sabendo que João é o primeiro a jogar, mostre uma estratégia para que ele possa ganhar sempre.

Problema 2. Sejam a e b números reais. Sabendo que os polinômios $x^2 + ax + 2017$ e $x^2 + bx + 2018$ possuem raízes inteiras positivas e possuem exatamente uma raiz em comum, determine a e b.

Problema 3. Enquanto estudava para OPM, Marcos se deparou com o seguinte problema: "Usando apenas a imaginação pense numa laranja e enlace-a pelo equador de forma bem justa. Depois, pegue o fio, estenda-o e aumente 1 metro no comprimento obtido. Faça outro círculo com o novo comprimento do fio e enlace a laranja de novo. Você acha que pela folga que ficou passaria um rato? Não responda ainda, seria muito fácil. Antes, vamos repetir o problema, apenas trocando a laranja por uma bola um pouco maior: a Terra. Circunde-a pela linha do equador e aumente o comprimento obtido em 1 metro. Enlace-a de novo e responda: um rato em pé, que possui 10 cm de altura, passaria pela folga?".



Usando apenas artifícios matemáticos, ajude Marcos a chegar numa solução.
Informação: O raio da Terra é 6400 km, aproximadamente.

Problema 4. Pierre de Fermat, matemático amador do século 17 responsável por um dos problemas mais famosos da matemática (*O Último Teorema de Fermat*, pesquise por ele após a prova), tem seu nome em vários teoremas como forma de homenagem. Um exemplo é o conhecido "Pequeno Teorema de Fermat", que diz que:

Se $p > 0$ é um número primo que não divide o número inteiro a, então o resto da divisão de a^{p-1} por p é 1.

(a) Calcule o resto da divisão de 2015^{2017} por 2017.

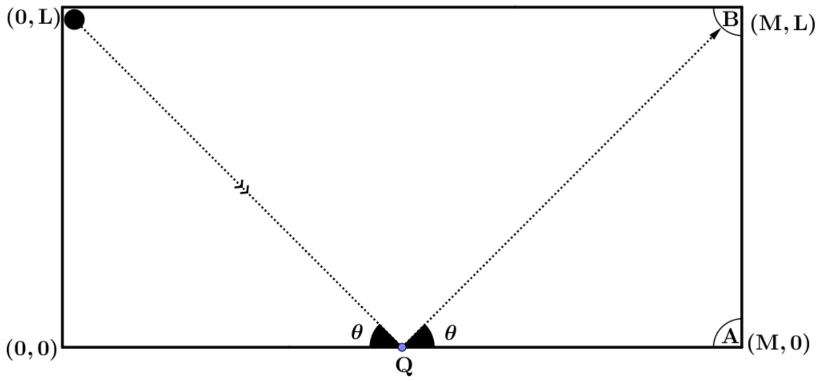
(b) Mostre que $2015^{2017} + 2016^{2018} + 2018^{2016}$ é divisível por 2017.

Sugestão: Se necessário, lembre-se, por exemplo, que $2016 = 2017 - 1$ e use o binômio de Newton: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, onde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Problema 5. Uma *sinuca matemática* é composta por um retângulo no plano cartesiano delimitado pelos pontos $(0,0),(M,0),(M,L)$ e $(0,L)$ com $L,M > 0$, um "bolão" situado no ponto $(0,L)$ e duas caçapas (buracos) nos pontos $A=(M,0)$ e $B=(M,L)$.

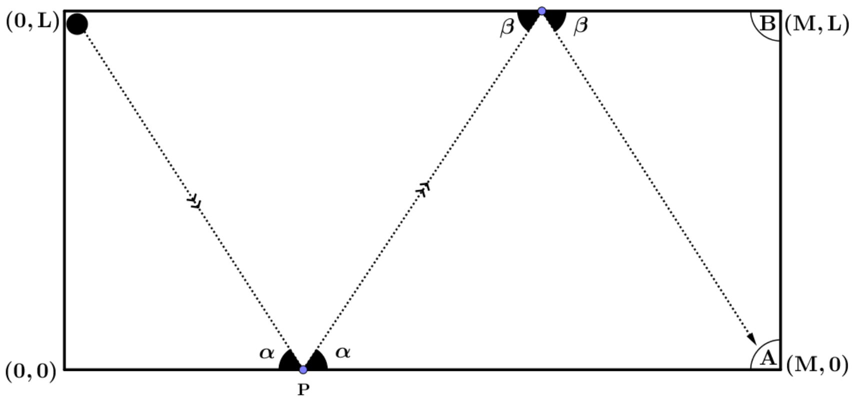
Um matemático brinca na sinuca tentando colocar o bolão nos pontos $A=(M,0)$ e $B=(M,L)$, mas com a condição de que o bolão só pode tocar os segmentos horizontais. Assuma que as trajetórias da bola são retas e, além disso, que os ângulo de incidência e de reflexão são iguais. Veja o exemplo abaixo.

Por exemplo, Fermat consegue acertar o bolão na caçapa B com apenas um reflexo, mirando no ponto Q como exemplifica a figura abaixo.



Os ângulos θ destacados acima são os ângulos de incidência e reflexão citados anteriormente. Através de cálculos simples, Fermat verificou que as coordenadas do ponto Q são $\frac{M}{2}$ e 0, respectivamente, ou seja, $Q=\left(\frac{M}{2},0\right)$.

(a) A figura abaixo representa o percurso feito pelo bolão quando ele é refletido exatamente duas vezes e cai na caçapa A. Determine as coordenadas do ponto P.



(b) Para cada n inteiro positivo, determine as coordenadas do primeiro ponto de reflexão do bolão e em que caçapa o bolão caiu, sabendo que antes de cair, o bolão foi refletido exatamente n vezes (no total).