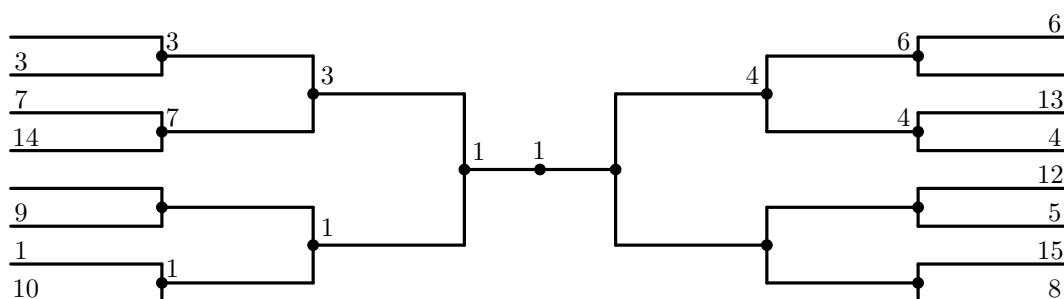




Nível 2 - Problemas

Problema 1. Um torneio de xadrez é realizado entre dezesseis competidores, ranqueados de 1 a 16 de acordo com suas habilidades: o enxadrista número 1 é o melhor entre todos eles, o enxadrista número 2 é o segundo melhor e assim sucessivamente. Neste torneio não há empates e, em cada duelo, **o vencedor é sempre o jogador melhor ranqueado**, ou seja, não há “zebras” (situações onde um enxadrista derrota outro considerado melhor). Quem perde é eliminado e quem vence avança para a próxima fase, até que haja um campeão, o enxadrista 1.

- a) Na tabela abaixo, de uma edição anterior do torneio, cada número representa um enxadrista de acordo com seu *ranking*, os pontos representam duelos e o vencedor é colocado ao lado do respectivo ponto (exemplo: o enxadrista 7 venceu o enxadrista 14, mas perdeu para o enxadrista 3 na fase seguinte). O ponto central representa o vencedor da final. Alguns números estão apagados. Preencha as lacunas corretamente.

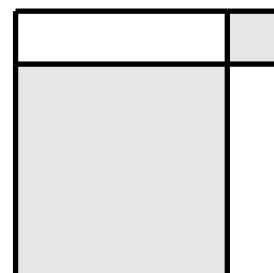


- b) Qual é o enxadrista de *ranking* mais baixo que pode chegar à final de um torneio cujo sorteio ainda será realizado? Justifique.

Problema 2. Aline e Saul viajaram até o país fictício chamado *Miramaristão*, cuja moeda oficial é o *miramar*. Neste país, só existem cédulas de 1 *miramar*, 3 *miramares*, 9 *miramares*, 27 *miramares* e 81 *miramares*. Ao passar por uma praça, Aline e Saul avistaram um homem vendendo um automóvel por 149 *miramares* e fazendo a seguinte oferta: “Se vocês me apresentarem 20 cédulas que somem exatamente 149 *miramares*, eu lhes darei o automóvel gratuitamente!”

- a) É possível que Aline e Saul tenham ganhado o automóvel?
- b) Suponha que Aline e Saul estavam dispostos a comprar o automóvel. Sabendo que o vendedor não tinha troco, qual é a quantidade mínima de cédulas que eles teriam que entregar ao vendedor?

Problema 3. Miriam tem um terreno quadrado com 53 metros de lado. Ela dividiu o terreno em quatro regiões, como representado na figura ao lado: duas regiões quadradas, com um ponto em comum, e duas regiões retangulares de áreas iguais. Sabendo que a soma das áreas em cinza é 2017 m^2 , responda:



- a) Quais são as medidas dos lados dos quadrados sombreados?
- b) Qual é a área de cada uma das quatro regiões?



Problema 4. O CPF, Cadastro de Pessoas Físicas, é um documento de identificação pessoal, cuja numeração é dada na forma $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}\boxed{F}\boxed{G}\boxed{H}\boxed{I} - \boxed{J}\boxed{K}$, onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ e K são algarismos de 0 a 9, inclusive. O algarismo J é chamado de **1º dígito verificador** e K é chamado de **2º dígito verificador**, pois eles servem para evitar fraudes ou erros de digitação. O procedimento para gerar um CPF é o seguinte:

- Os algarismos de A a I não podem ser todos iguais e podem ser atribuídos livremente, no sentido de que não há qualquer outra dependência matemática entre eles;
- Para determinar o algarismo J , calculamos a soma S_1 a seguir:

$$S_1 = 10A + 9B + 8C + 7D + 6E + 5F + 4G + 3H + 2I.$$

Se o resto r_1 da divisão de S_1 por 11 for 0 ou 1, então colocamos $J = 0$. Caso contrário, colocamos $J = 11 - r_1$.

- Para determinar o algarismo K , calculamos a soma S_2 a seguir:

$$S_2 = 11A + 10B + 9C + 8D + 7E + 6F + 5G + 4H + 3I + 2J.$$

Se o resto r_2 da divisão de S_2 por 11 for 0 ou 1, então colocamos $K = 0$. Caso contrário, colocamos $K = 11 - r_2$.

- a) Determine os dígitos verificadores J e K para a seguinte numeração de CPF:

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9} - \boxed{J}\boxed{K}$$

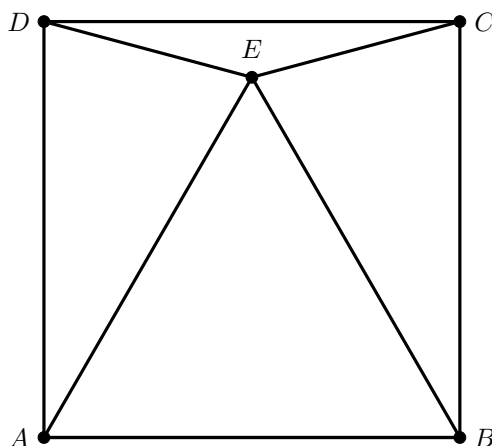
- b) Por um erro de impressão, um CPF saiu com dois dígitos apagados, aqui representados por x e y :

$$\boxed{x}\boxed{2}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{5} - \boxed{y}\boxed{8}$$

Determine a numeração completa do CPF.

Problema 5. Sílvia tem um terreno quadrado de lado x . Ele dividiu o terreno em quatro áreas triangulares conforme a figura abaixo. O triângulo ABE é equilátero.

- Qual é a medida, em graus, do ângulo \widehat{DEC} ?
- Calcule a área do triângulo DEC em função de x .



ERRATA: A prova original teve um erro de digitação no enunciado do Problema 4 (o dígito \boxed{F} foi acidentalmente omitido), que foi esclarecido para todos os alunos durante a aplicação da prova e corrigido neste arquivo. A Comissão Organizadora da OPM pede desculpas por isto.