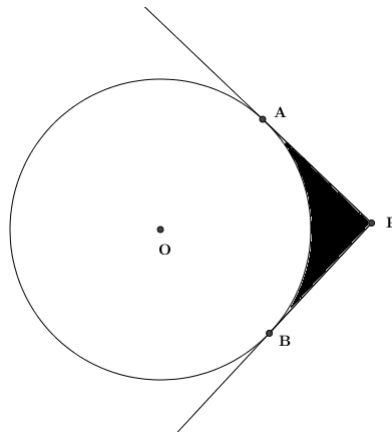




PROVA NÍVEL 3 - OPM 2016

Problema 1. A equação polinomial do 3º grau $ax^3 + (b - a)x^2 - (b + 3)x + 3 = 0$ tem $x = -1$ como uma de suas três raízes. Sabendo que a e b são números primos positivos, determine as outras duas raízes da equação.

Problema 2. A circunferência abaixo de centro O tem raio 1, o segmento OP mede $\sqrt{2}$, e as semiretas PA e PB são tangentes à circunferência nos pontos A e B , respectivamente. Determine a área da região sombreada.



Problema 3. O vaqueiro Chico dispõe de 80 metros de arame farpado. Chico dividiu o arame farpado em dois pedaços, um com x metros e o outro com y metros. Ele decidiu fazer um cercado em forma de circunferência com o pedaço de x metros, e um outro cercado na forma de um triângulo equilátero com o pedaço de y metros. Determine para que valores de x e y a soma das áreas dois cercados é mínima. (OBS: os cercados não possuem interseção.)

Problema 4. Numa mesa há n palitos espalhados. Joãozinho e Maria se revezam no seguinte jogo: Alternadamente, na sua vez, cada um pode tirar 1, 2, 3 ou 4 palitos (se possível). Perde aquele que tirar o último palito. Joãozinho começa o jogo.

1. Para $n = 11$, mostre qual estratégia Maria deve seguir para sempre ganhar o jogo;
2. Para $n = 2017$, mostre que João pode sempre ganhar, descrevendo qual estratégia ele deve seguir.

Problema 5. Na Loteria Matemática são sorteados três números inteiros entre 1 e 50, todos distintos. As apostas possíveis são:

- Aposta 1: A soma dos três números escolhidos é divisível por 3;
- Aposta 2: A soma dos três números escolhidos deixa resto 1 na divisão por 3;
- Aposta 3: A soma dos três números escolhidos deixa resto 2 na divisão por 3.

Se você só pode apostar em apenas uma das opções acima, determine qual aposta deve ser feita para que a probabilidade de ganhar na Loteria Matemática seja máxima.

Boa Prova!