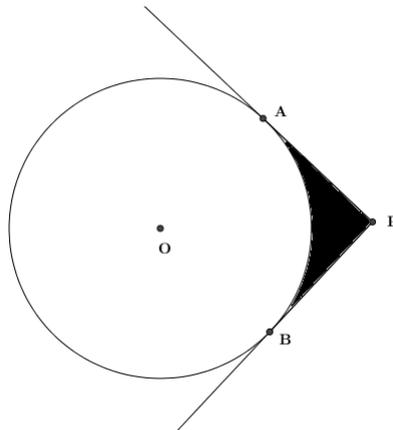




## PROVA NÍVEL 3 - OPM 2016

**Problema 1.** A equação polinomial do 3º grau  $ax^3 + (b - a)x^2 - (b + 3)x + 3 = 0$  tem  $x = -1$  como uma de suas três raízes. Sabendo que  $a$  e  $b$  são números primos positivos, determine as outras duas raízes da equação.

**Problema 2.** A circunferência abaixo de centro  $O$  tem raio 1, o segmento  $OP$  mede  $\sqrt{2}$ , e as semiretas  $PA$  e  $PB$  são tangentes à circunferência nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Determine a área da região sombreada.



**Problema 3.** O vaqueiro Chico dispõe de 80 metros de arame farpado. Chico dividiu o arame farpado em dois pedaços, um com  $x$  metros e o outro com  $y$  metros. Ele decidiu fazer um cercado em forma de circunferência com o pedaço de  $x$  metros, e um outro cercado na forma de um triângulo equilátero com o pedaço de  $y$  metros. Determine para que valores de  $x$  e  $y$  a soma das áreas dois cercados é mínima. (OBS: os cercados não possuem interseção.)

**Problema 4.** Numa mesa há  $n$  palitos espalhados. Joãozinho e Maria se revezam no seguinte jogo: Alternadamente, na sua vez, cada um pode tirar 1, 2, 3 ou 4 palitos (se possível). Perde aquele que tirar o último palito. Joãozinho começa o jogo.

1. Para  $n = 11$ , mostre qual estratégia Maria deve seguir para sempre ganhar o jogo;
2. Para  $n = 2017$ , mostre que João pode sempre ganhar, descrevendo qual estratégia ele deve seguir.

**Problema 5.** Na Loteria Matemática são sorteados três números inteiros entre 1 e 50, todos distintos. As apostas possíveis são:

- Aposta 1: A soma dos três números escolhidos é divisível por 3;
- Aposta 2: A soma dos três números escolhidos deixa resto 1 na divisão por 3;
- Aposta 3: A soma dos três números escolhidos deixa resto 2 na divisão por 3.

Se você só pode apostar em apenas uma das opções acima, determine qual aposta deve ser feita para que a probabilidade de ganhar na Loteria Matemática seja máxima.

Boa Prova!