Gabarito da Prova do Nível 3

1. Quem vai informar em quantos zeros o número acaba será a quantidade de vezes que tivermos o fator 10 no produto. Como $10 = 2 \cdot 5$, devemos buscar quantos fatores iguais a 5 temos entre 1 e 100, pois os fatores 2 aparecem em quantidade bem maior. Na tabela a seguir estão contadas essas possibilidades:

Intervalo	**Número de fatores iguais a** 5
1 a 9	1
10 a 19	2
20 a 29	3
30 a 39	2
40 a 49	2
50 a 59	3
60 a 69	2
70 a 79	3
80 a 89	2
90 a 99	2
100	2

Portanto, como aparecem 24 fatores iguais a 5, certamente teremos 24 fatores iguais a 2, o número $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 99 \cdot 100$ acaba em 24 zeros.

---

2. O ângulo $B\hat{P}D$ é central, logo mede o dobro de $37,5^o$, ou seja, $B\hat{P}D = 75^o$. Utilizando a Lei dos cossenos no triângulo BPD, temos: $\ell^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(75)$, ou seja, $\ell^2 = 2r^2\left(1 - \cos(75)\right)$. Portanto, $\dfrac{\ell}{r} = \sqrt{2\left(1 - \cos(75)\right)}$. Utilizando a dica fornecida e o fato de que $75 = 45 + 30$, temos que $\cos(75) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Finalmente, temos então que:

$$\frac{\ell}{r} = \sqrt{2\left(1-\cos\left(75\right)\right)} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}.$$

---

3. Cada conjunto forma uma P.A. de razão 1 e com n termos. Para calcularmos a soma dos seus termos, precisamos essencialmente descobrir quanto vale o primeiro termo em função de n. Vamos denotar por A_n o primeiro termo do n-ésimo conjunto e por B_n, o último termo. Assim, temos que $B_n = A_n + \left(n-1\right)\cdot 1 = A_n + n - 1$. Além disso, como o primeiro termo de um conjunto é igual ao último termo do conjunto anterior somado com 1, temos que $B_n + 1 = A_{n+1}$. Logo, $A_n + n - 1 + 1 = A_{n+1}$, ou seja, $A_{n+1} = A_n + n$. Agora note que:

$$\begin{gathered} A_2 - A_1 = 1 \\ A_3 - A_2 = 2 \\ A_4 - A_3 = 3 \\ \vdots \\ A_n - A_{n-1} = n-1 \end{gathered}$$

Somando todas essas igualdades, teremos que $A_n - A_1 = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$, ou seja,

$$A_n = \frac{\left(n-1\right)\cdot\left(n-1+1\right)}{2} + 1 = \frac{n\cdot\left(n-1\right)}{2} + 1$$

No nosso caso em particular, $n = 2015$. Daí:

$$A_{2015} = \frac{2015\cdot\left(2015-1\right)}{2} + 1 = 1007\cdot 2015 + 1 = 2029106.$$

Portanto, a soma dos termos do conjunto de ordem 2015 será:

$$\frac{\left(2029106 + 2031120\right)\cdot 2015}{2} = 2030113\cdot 2015 = 4090677695.$$

4.

a. Façamos $x = y = 1$. Logo $f(1)\cdot f(1) - f(1) = 1+1$, ou seja, $\left(f(1)\right)^2 - f(1) - 2 = 0$. Resolvendo essa equação do segundo grau na incógnita $f(1)$, encontramos os valores $f(1) = 2$ ou $f(1) = -1$. Como o domínio de f é $\mathbb{R}_+^*$, não podemos ter $f(1) = -1$ e assim $f(1) = 2$.

b. Façamos na igualdade $y = 1$ e deixemos x variar. Logo, $f(x)\cdot f(1) - f(x) = \frac{x}{1} + \frac{1}{x}$. Como $f(1) = 2$, temos que $2f(x) - f(x) = x + \frac{1}{x}$, donde $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

5.

a. O número 3690 é trivisível, pois qualquer número de três algarismos formados com os algarismos de 3690 é divisível por 3. Já o número 2015 não é trivisível, pois 215 não é divisível por 3.

b. A resposta é NÃO. O algarismo A poderia ser igual a $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou 9. Entretanto, de acordo com a tabela a seguir, sempre encontramos algum número com 3 algarismos de $A354$ que não é divisível por 3.

Possibilidade para A	**Número não divisível por 3**
1	145
2	245
3	335
4	445
5	554
6	635
7	743
8	853
9	943

c. Suponha que o número $abcd$ seja trivisível. Como são 3 os restos possíveis na divisão por 3, podemos sempre garantir que dois deles deixam o mesmo resto nessa divisão. Suponhamos que a e b deixam o mesmo resto r_1 quando divididos por 3 e que c deixe um resto $r_2 \neq r_1$ quando dividido por 3. Vamos analisar então a divisibilidade por 3 do número abc. Como $abc = 100a + 10b + c$, o algoritmo da divisão nos permite escrever essa igualdade como

$$abc = 100a + 10b + c = 100(3p + r_1) + 10(3q + r_1) + 3s + r_2.$$

Observando que $100 = 99 + 1$ e $10 = 9 + 1$, temos que:

$$abc = 3(100p + 10q + s) + 100r_1 + 10r_1 + r_2 = 3(100p + 10q + s + 33r_1 + 3r_1) + 2r_1 + r_2$$

Como $0 \leq r_1, r_2 < 3$, as possibilidades para $2r_1 + r_2$ estão mostradas na tabela a seguir:

r_1	r_2	$2r_1 + r_2$	Resto na divisão por 3
0	1	1	1
0	2	2	2
1	0	2	2
1	2	4	1
2	0	4	1
2	1	5	2

De acordo com essa tabela, o número abc não é divisível por 3. Mas isso não pode ocorrer, pois $abcd$ é trivisível. Essa contradição veio do fato de termos suposto que o resto na divisão de c por 3 era diferente do resto da divisão de a e b por 3. Logo esse resto deve ser o mesmo. Analogamente mostramos que o resto na divisão de d por 3 deve ser o mesmo da divisão de a e b por 3.

d. Pela letra (c), se $abcd$ é trivisível, os dígitos devem todos deixar o mesmo resto na divisão por 3. Assim, para contarmos quantos números trivisíveis existem, é suficiente separarmos três casos:

I. $a,b,c,d \in \{0,3,6,9\}$. Nesse caso, podemos formar $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ números trivisíveis.

II. $a,b,c,d \in \{1,4,7\}$. Nesse caso, podemos formar $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ números trivisíveis.

III. $a,b,c,d \in \{2,5,8\}$. Nesse caso, podemos formar $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ números trivisíveis.

Assim, temos $192 + 81 + 81 = 354$ números trivisíveis.