Gabarito da Prova do Nível 2

1. Observando o padrão das igualdades, temos que a n-ésima é dada por

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Assim sendo, temos:

a. $2015^2 - 2014^2 = 2 \cdot 2014 + 1 = 4029$. Como $2015 = 2n + 1 \therefore n = 1007$. Portanto, $(1008)^2 - (1007)^2 = 2015$.

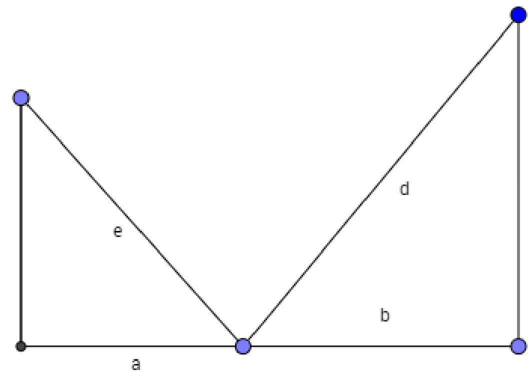
b. Como todos os fatores são números ímpares, em virtude do padrão apresentado, temos que o produto é um número ímpar.

---

2. Inicialmente devemos notar que os triângulos ABC e EAC são congruentes, pelo caso Lado-Ângulo-Lado. Portanto, como a área do paralelogramo $EABC$ vale 2, a área de cada um desses triângulos vale 1. Ademais, os triângulos EAC e EDC também são congruentes, pois $ACDE$ é um retângulo e CE é uma diagonal. Logo, a área do quadrilátero $ABDE$ é igual a 3 vezes a área do triângulo ABC, ou seja, a área do quadrilátero $ABDE$ vale 3.

---

3. Observando os dois triângulos da figura a seguir, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que $a^2 + 30^2 = e^2 = d^2 = b^2 + 40^2$, por um lado e $a + b = 60$, por outro. Resolvendo esse sistema, encontramos $a = 215/6$ m e $b = 145/6$ m.



4.

a. Como Ivan retira 3 palitos, sobrarão 7 palitos sobre a mesa. Cássio então retira 5 palitos, restando 2. Ivan só pode retirar 1 palito, restando portanto 1. Cássio retira esse palito e ganha o jogo.
b. Ivan só pode retirar 1, 3, 7 ou 9 palitos. Vamos analisar, caso a caso.

- Já vimos na letra (a) que se Ivan começa retirando 3 palitos, Cássio ganha o jogo.

- Se Ivan retirar 9 palitos, restará apenas 1 e Cássio novamente ganha o jogo.

- Se Ivan retirar 7 palitos, restarão 3. Cássio retira 1, sobrando 2. Ivan só pode retirar 1 e, novamente Cássio ganha a partida.

- Se Ivan retirar 1 palito, Cássio retira 7. Novamente, sobram 2 palitos e Ivan só pode retirar 1. Portanto, Cássio ganha o jogo.

---

5. Observe que $x^2+4y^2-4xy+2x-4y+2=(x-2y)^2+2(x-2y)+2$. Portanto, se chamarmos $x-2y$ de A, a expressão dada no enunciado é equivalente a

A^2+2A+2, que, por sua vez, é equivalente a $(A+1)^2+1$, que é sempre maior que zero, para quaisquer valores de x e de y.