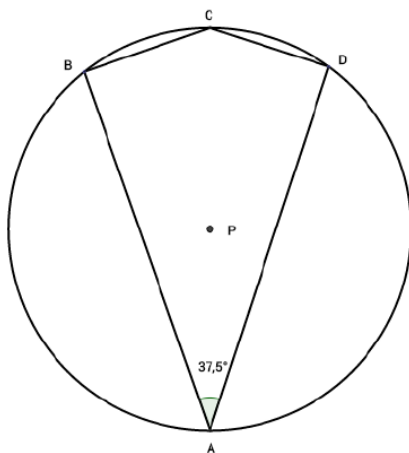


PROVA DO NÍVEL 3 – OPM 2015

1. Com quantos zeros termina o número obtido pelo produto de todos os inteiros positivos de 1 até 100, inclusive? Justifique.
2. Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrilátero tal que $BD = \ell$, $\widehat{BAD} = 37,5^\circ$ e P é o centro da circunferência de raio r que contém os vértices do quadrilátero $ABCD$. Com essas hipóteses, calcule o valor da razão $\frac{\ell}{r}$. **Dica:** Lembre que $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$.



3. Considere a seguinte sequência de conjuntos:

$$\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \{11,12,13,14,15\}, \dots$$

Observando o padrão apresentado, determine a soma dos elementos do 2015º conjunto dessa sequência.

4. Seja $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, uma função tal que $f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, quaisquer que sejam os reais não nulos x e y . Faça os seguintes itens:
 - a. Calcule $f(1)$
 - b. Encontre uma fórmula para $f(x)$.

5. Um número de quatro algarismos $abcd$ é chamado **Trivisível** se todos os números com 3 algarismos possíveis de se formar usando os algarismos a, b, c ou d , repetidos ou não, são todos divisíveis por 3. Faça os seguintes itens:
- Dê exemplo de um número trivisível com todos os algarismos distintos e de um não trivisível.
 - É possível escolher A de modo que $A354$ seja trivisível?
 - Prove que se um número $abcd$ é trivisível então a, b, c e d deixam o mesmo resto quando divididos por 3.
 - Quantos números trivisíveis existem? Justifique sua resposta.

Boa Sorte!