

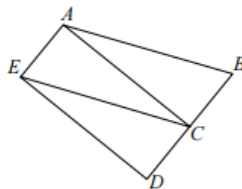
PROVA DO NÍVEL 2 – OPM 2015

1. Observe as seguintes igualdades

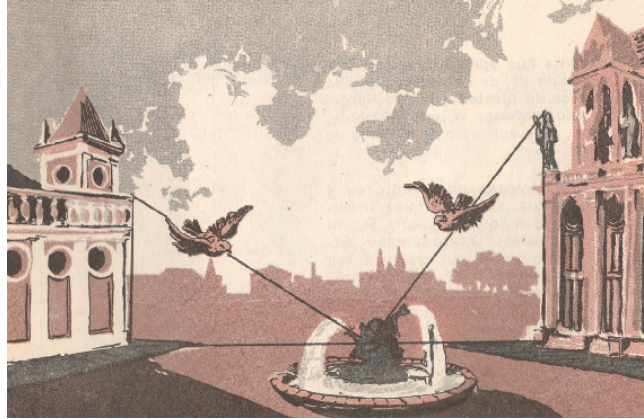
$$\begin{cases} 1^2 - 0^2 = 1 \\ 2^2 - 1^2 = 3 \\ 3^2 - 2^2 = 5 \\ \vdots \end{cases}$$

Baseado no padrão observado faça os seguintes itens:

- a. Complete os espaços a seguir $2015^2 - 2014^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ e $(\underline{\hspace{2cm}})^2 - (\underline{\hspace{2cm}})^2 = 2015$, de modo que as igualdades sejam verdadeiras.
- b. O produto $(1^2 - 0^2) \times (2^2 - 1^2) \times (3^2 - 2^2) \times \dots \times (2015^2 - 2014^2)$ é um número par ou ímpar? Justifique sua resposta.
2. Na figura, C é um ponto do segmento BD tal que $ACDE$ é um retângulo e $ABCE$ é um paralelogramo de área 2. Determine a área do quadrilátero $ABDE$.



3. Problema adaptado de um livro do século XIII: “Na figura a seguir, estão mostradas duas torres, uma com 30 metros e outra com 40 metros de altura, que estão a uma distância de 60 metros uma da outra. Entre ambas se acha uma fonte, para a qual dois pássaros descem simultaneamente do alto das torres, percorrendo a mesma distância. Quais as distâncias horizontais da fonte às duas torres?”



4. Ivan e Cássio estão disputando uma partida do Jogo Tira Palitos. Esse jogo obedece às seguintes regras.
- Numa mesa estão 10 palitos e dois jogadores revezam-se tirando palitos.
 - Na sua vez, o jogador deve contar a quantidade x de palitos existentes na mesa e só pode retirar uma quantidade y de palitos de modo que x e y sejam primos entre si, isto é, $\text{mdc}(x, y) = 1$.
 - Ganha o jogador que tirar o último palito.
- a. Digamos que Ivan começa o jogo retirando 3 palitos. Explique como Cássio deve jogar para ganhar a partida.
- b. Digamos que Ivan começa o jogo. Explique como Cássio deve jogar para ganhar a partida sempre, independentemente de quantos palitos Ivan retire no início.
5. Mostre que, para quaisquer que sejam os números reais x e y , a expressão $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2$ é sempre maior que zero. **Dica:** Caso ajude, chame $x - 2y$ de alguma letra.

Boa Sorte!