Universidade Federal da Paraíba - Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Olimpíada Pessoense de Matemática - 2014 - Solução da Prova do Nível 3

Questão 1 - Dois digitadores D_1 e D_2 se alternam na digitação de um livro de Matemática de 354 páginas. O digitador D_1 trabalhou 3 horas a mais do que D_2. Se D_1 tivesse trabalhado durante o mesmo tempo que D_2 trabalhou, teria digitado 120 páginas. Se D_2 tivesse digitado durante o mesmo tempo que D_1 trabalhou, teria completado 252 páginas. Determine durante quanto tempo cada digitador trabalhou e quantas páginas cada um digitou.

Solução: *Sendo x o total de horas que D_2 trabalhou, tem-se que D_1 trabalhou um total de $x + 3$ horas. Logo, o número de páginas que D_1 digitou por hora foi $120/x$ enquanto que D_2 digitou $252/(x + 3)$ páginas em cada hora. Desta forma, o total de páginas digitadas por D_1 foi de $120.(x + 3)/3$ e o de D_2 foi de $252.x/(x + 3)$. Portanto,*

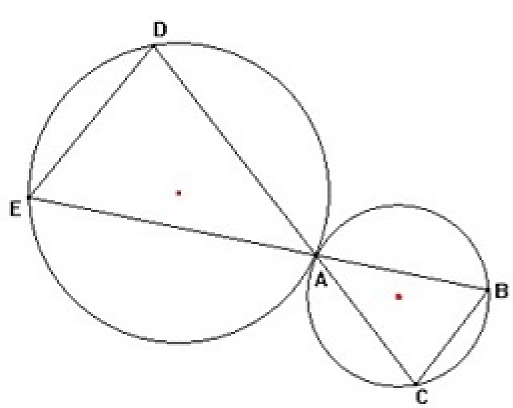
$$\frac{120(x+3)}{x} + \frac{252x}{x+3} = 354.$$

Eliminando os denominadores e simplificando, obtemos $x^2 - 19x + 60 = 0$, de onde devemos ter $x = 15$ ou $x = 4$. Ambas as possibilidades são válidas: o problema admite duas respostas. Se $x = 15$ então D_1 trabalhou um total de 18 horas, digitando $120/15 = 8$ páginas por hora, enquanto D_2 trabalhou durante 15 horas, digitando $252/18 = 14$ páginas por hora. Ao todo, D_1 digitou 144 páginas e D_2 digitou 212. Por outro lado, se $x = 4$ então D_1 trabalhou durante 7 horas, fazendo 120/4=30 páginas por hora e D_2 trabalhou durante 4 horas, completando $252/7 = 36$ páginas por hora.

Questão 2 - Ordene, do menor para o maior, os números reais: $a = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^2$, $\quad b = \sqrt{3}^{(\sqrt{2})^2}$, $\quad c = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Solução: Note que $a = (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}}$ e $b = (\sqrt{3})^2$. Desde que a função exponencial $f(x) = (\sqrt{3})^x$ é crescente e $\sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2}$, segue que $c < b < a$.

Questão 3 - Na figura abaixo, temos duas circunferências tangentes em A. Mostre que os segmentos DE e BC são paralelos.



Solução: Para mostrar que os segmentos DE e BC são paralelos, basta mostrar que os ângulos alternos internos $A\widehat{D}E$ e $A\widehat{C}B$ são congruentes. Para isso, consideremos a reta t tangente as duas circunferências no ponto A. Como ângulos inscritos e semi-inscritos num arco de circunferência medem a metade do arco, tem-se que

$$A\widehat{D}E = E\widehat{A}F = G\widehat{A}B = A\widehat{C}B,$$

o que demonstra o desejado.

Questão 4 - Seja $p(x) = x^{10} + b_9x^9 + b_8x^8 + \ldots + b_1x + 1$, com $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 9$. Demonstre que, se as raízes do polinômio $p(x)$ são todas reais, então $p(2) \geq 3^{10}$.

Sugestão: Não esqueça de usar decomposição do polinômio, do fato que a média aritmética de três números reais não negativos é maior ou igual a sua média geométrica e das relações de Girard.

Solução: *Vamos denotar por $r_1, \ldots, r_{10}$ as raízes reais de $p(x)$, as quais são todas negativas pelo fato dos coeficientes b_i serem todos não negativos. Como $b_{10} = 1$, temos a decomposição*

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_{10})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} p(2) &= (1 + 1 + (-r_1))(1 + 1 + (-r_2)) \ldots (1 + 1 + (-r_{10})) \\ &\geq 3^{10} \sqrt[3]{(-r_1)(-r_2) \ldots (-r_{10})} \\ &\geq 3^{10} \sqrt[3]{r_1 r_2 \ldots r_{10}} = 3^{10}, \end{aligned}$$

onde usamos que a média aritmética de 3 números não-negativos é sempre maior ou igual à sua média geométrica, isto é,

$$\frac{1 + 1 + (-r_i)}{3} \geq \sqrt[3]{-r_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

e na última linha foi usada a relação de Girard.

Questão 5 - Utilizando o Binômio de Newton em cada parcela, determine o resto da divisão de $12^{99} + 14^{99}$ por 169.

Solução: *Das igualdades*

$$\begin{aligned} 12^{99} &= (13 - 1)^{99} = \binom{99}{0} 13^{99} - \binom{99}{1} 13^{98} + \cdots - \binom{99}{99} 13^0 \\ 14^{99} &= (13 + 1)^{99} = \binom{99}{0} 13^{99} + \binom{99}{1} 13^{98} + \cdots + \binom{99}{99} 13^0, \end{aligned}$$

obtemos

$$12^{99} + 14^{99} = 2\binom{99}{0} 13^{99} + 2\binom{99}{2} 13^{97} + \cdots + 2\binom{99}{98} 13.$$

Logo, o resto da divisão de $12^{99} + 14^{99}$ por $169 = 13^2$ é igual o resto da divisão de $2\binom{99}{98}13 = 2 \times 99 \times 13$ por 169, que é 39.