

Universidade Federal da Paraíba - Centro de Ciências Exatas e da Natureza
 Departamento de Matemática
 Olimpíada Pessoaense de Matemática - 2014 - Solução da Prova do Nível 2

Questão 1 - A soma de todos os números ímpares de três algarismos menos a soma de todos os números pares de três algarismos é um número par ou ímpar? Justifique sua resposta calculando esse número

Solução: Os números pares de 3 algarismos são 100, 102, ..., 998 enquanto que os ímpares são 101, ..., 999. Observe que existem 450 números ímpares de 3 algarismos enquanto que existem 450 números pares de 3 algarismos. Denotando por $P = 100 + 102 + \dots + 998$ e por $I = 101 + 103 + \dots + 999$, temos que $I - P = \underbrace{100 + 1}_{=101} - 100 + \underbrace{102 + 1}_{=103} - 102 + \dots + \underbrace{998 + 1}_{=999} - 998 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{450 \text{ vezes}} = 450$ que é um número par.

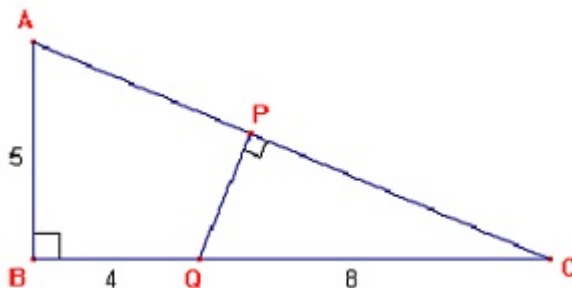
Questão 2 - Em toda aula de Matemática, a professora escolhe três alunos, entre 50 no total, para ajudarem os outros alunos nos exercícios dados em sala. É possível que após certo tempo, um aluno escolhido tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

Solução: Não é possível pois retirado este aluno escolhido do grupo restariam 49 alunos e como 49 é um número ímpar, não é possível que se tenha duplas diferentes para trabalhar com esse aluno. Assim, depois de um certo tempo, ele irá trabalhar com um dos outros alunos mais do que uma vez.

Questão 3 - Determine o algarismo da ordem das unidades da expressão: $3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2013} + 3^{2014}$.

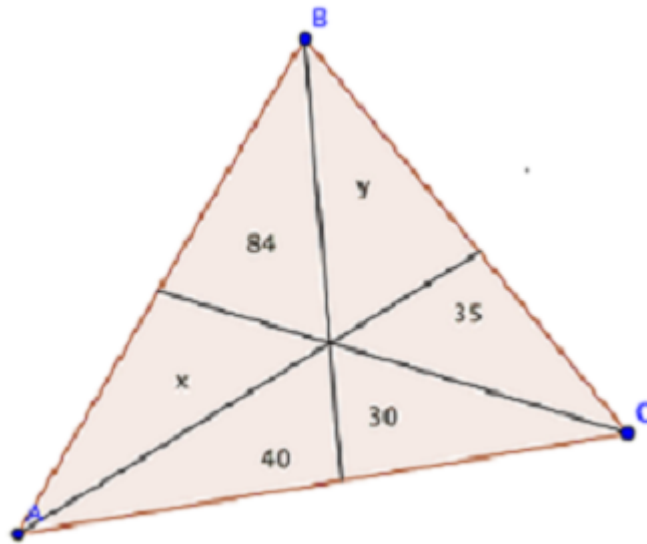
Solução: O algarismo da unidade de $3^1 = 3$; de $3^2 = 9$; de $3^3 = 7$; de $3^4 = 1$; de $3^5 = 3$; de $3^6 = 9$; de $3^7 = 7$; de $3^8 = 1$, ou seja, os algarismos das unidades estão seguindo um padrão de quatro em quatro que é: 3, 9, 7, 1. Como 2012 é múltiplo de 4 então o algarismo da unidade de $3^{2012} = 1$ e $3^{2013} = 3$. Formando grupos de quatro em quatro parcelas da expressão $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2012} + 3^{2013}$ e somando os algarismos da unidade obtém-se como soma $3 + 9 + 7 + 1 = 20$, daí o algarismo da unidade de cada grupo de quatro em quatro parcelas será 0, mas ainda restou o 3^{2013} e 3^{2014} , cujos algarismos das unidades são $3^{2013} = 3$ e $3^{2014} = 9$. Portanto, o algarismo da ordem das unidades da soma de $3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2013}$ vai ser igual a 2.

Questão 4 - O triângulo retângulo ABC da figura a seguir é tal que $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$ e $\overline{AC} = 13$. Os pontos P e Q estão sobre os lados do triângulo ABC e são tais que os segmentos PQ e AC são perpendiculares e, mais ainda, $\overline{BQ} = 4$. Determine o perímetro do quadrilátero $ABQP$.

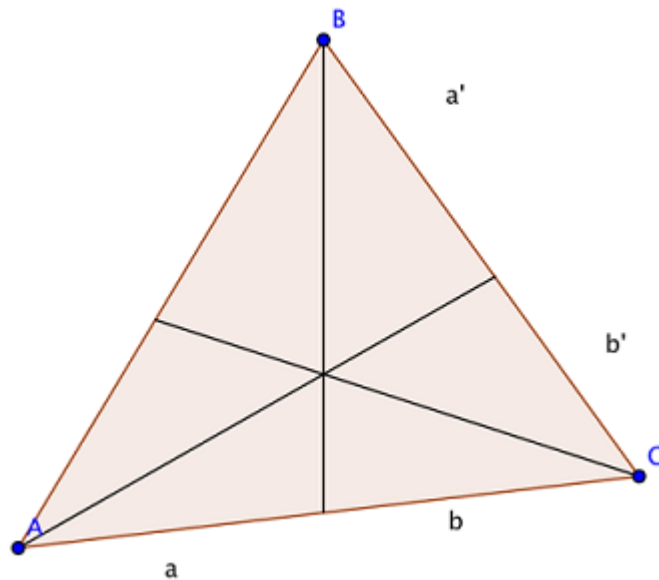


Solução: Como os triângulos retângulos ABC e QPC possuem os mesmos ângulos, eles são semelhantes. Da semelhança $ABC \sim QPC$ podemos escrever $\frac{AB}{QP} = \frac{AC}{QC} = \frac{BC}{PC}$. Substituindo os dados do problema, obtemos $\frac{5}{QP} = \frac{13}{8} = \frac{12}{PC}$. Daí segue que $PQ = \frac{40}{13}$ e $PC = \frac{96}{13}$. Também temos $AP = AC - PC = 13 - \frac{96}{13} = \frac{73}{13}$. Assim, o perímetro do quadrilátero $ABQP$ é $AB + BQ + QP + PA = 5 + 4 + \frac{40}{13} + \frac{73}{13} = \frac{230}{13}$

Questão 5 - Um triângulo ABC é dividido em seis triângulos conforme figura a seguir. Sabendo que os valores dentro dos triângulos menores correspondem às áreas dos respectivos triângulos, calcule a área do triângulo ABC



Solução: Inicialmente devemos observar que: se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Assim, denotando a, b e a', b' as medidas das bases, conforme a figura abaixo,



temos: $\frac{84 + x + 40}{y + 35 + 30} = \frac{a}{b} = \frac{40}{30}$ e $\frac{x + y + 84}{30 + 40 + 35} = \frac{a'}{b'} = \frac{y}{35}$, o que resulta no seguinte sistema linear $4y - 3x = 112$ e $x - 2y = -84$, cuja solução é $x = 56$ e $y = 70$. Portanto, a área do triângulo ABC , que é obtida pela soma das áreas dos triângulos menores, é igual a 315.