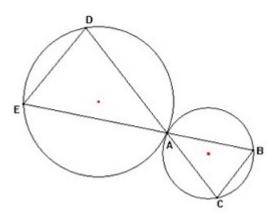
Universidade Federal da Paraíba - Centro de Ciências Exatas e da Natureza Departamento de Matemática

Olimpíada Pessoense de Matemática - 2014 - Prova do Nível 3

Questão 1 - Dois digitadores D_1 e D_2 se alternam na digitação de um livro de Matemática de 354 páginas. O digitador D_1 trabalhou 3 horas a mais do que D_2 . Se D_1 tivesse trabalhado durante o mesmo tempo que D_2 trabalhou, teria digitado 120 páginas. Se D_2 tivesse digitado durante o mesmo tempo que D_1 trabalhou, teria completado 252 páginas. Determine durante quanto tempo cada digitador trabalhou e quantas páginas cada um digitou.

Questão 2 - Ordene, do menor para o maior, os números reais: $a = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^2$, $b = \sqrt{3}^{(\sqrt{2})^2}$, $c = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Questão 3 - Na figura abaixo, temos duas circunferências tangentes em A. Mostre que os segmentos DE e BC são paralelos.



Questão 4 - Seja $p(x) = x^{10} + b_9 x^9 + b_8 x^8 + \ldots + b_1 x + 1$, com $b_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, 9$. Demonstre que, se as raízes do polinômio p(x) são todas reais, então $p(2) \ge 3^{10}$.

Sugestão: Não esqueça de usar decomposição do polinômio, do fato que a média aritmética de três números reais não negativos é maior ou igual a sua média geométrica e das relações de Girard

Questão 5 - Utilizando o Binômio de Newton em cada parcela, determine o resto da divisão de $12^{99} + 14^{99}$ por 169.

Boa Prova!