

PROVA DO NÍVEL 3 - OPM 2013

1) Considere a, b, c, d definidos por

$$\bullet a = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{304}$$

$$\bullet b = \frac{1}{7} + \frac{1}{67} + \frac{1}{8911}$$

$$\bullet c = \frac{1}{3} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1653}$$

$$\bullet d = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{988}$$

Determine o menor valor positivo n para o qual na, nb, nc e nd são inteiros.

2) Determine uma raiz da equação exponencial $9^x + 15^x = 25^x$.

3) Os pontos A, B, C e D estão cada um sobre lados distintos de um quadrado de lado 1. Unindo-se esses quatro pontos obtemos um quadrilátero cujos lados medem a, b, c, d . Determine o menor e o maior valor possível para a expressão $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

4) A função $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é definida pelos valores da seguinte tabela

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Determine o valor de $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2013 \text{ vezes}}(4)$.

5) Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2013},$$

na qual observamos o seguinte:

- o denominador de cada uma das frações é o produto de dois ímpares consecutivos escolhidos de 1 a 2013;
- cada ímpar de 3 a 2011 aparece uma vez nos denominadores de duas frações distintas.

Sugestão: Determine valores de A e B tais que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$.