OLIMPÍADA PESSOENSE DE MATEMÁTICA - nov/2013

Resolução da prova de nível 3

1) Considere a, b, c, d definidos por

- $a = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{304}$
- $b = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{67} + \dfrac{1}{8911}$
- $c = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{29} + \dfrac{1}{1653}$
- $d = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{26} + \dfrac{1}{988}$

Determine o menor valor positivo n para o qual na, nb, nc e nd são inteiros.

Solução: Cada uma das somas de frações podem ser efetuadas e simplificadas:

- $a = \frac{76+19+1}{304} = \frac{96}{304} = \frac{6}{19}$
- $b = \frac{1273+133+1}{8911} = \frac{1407}{8911} = \frac{3}{19}$
- $c = \frac{551+57+1}{1653} = \frac{609}{1653} = \frac{7}{19}$
- $d = \frac{494+247+38+1}{988} = \frac{780}{988} = \frac{15}{19}$

Como todas as frações simplificadas têm denominadores iguais a 19 temos que se $n = 19$ então na, nb, nc e nd são iguais a $6, 3, 7$ e 15, respectivamente e esse é o menor valor de n para o qual esses valores são inteiros.

2) Determine uma raiz da equação exponencial $9^x + 15^x = 25^x$.

Solução: Para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, temos que 9^x, 25^x e 15^x são todos diferentes de zero. Logo, podemos dividir cada membro da equação por qualquer um desses termos. Dividindo-se os dois membros por 25^x, obtemos: $\frac{9^x+15^x}{25^x} = \frac{25^x}{25^x}$ que equivale a $\frac{3^{2x}+3^x \cdot 5^x}{5^{2x}} = 1$ que pode ser simplificada para

$$(\frac{3}{5})^{2x} + (\frac{3}{5})^x = 1.$$

Fazendo a mudança de variável $(\frac{3}{5})^x = y$, obtemos a equação do segundo grau

$$y^2 + y - 1 = 0$$

cujas raízes são $y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Como $y > 0$, temos que $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja,

$$(\frac{3}{5})^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aplicando-se logaritmos aos dois membros, obtemos $\log\left((\frac{3}{5})^x\right) = \log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, ou seja, $x\log\left(\frac{3}{5}\right) = \log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ o que implica

$$x = \frac{\log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} = \log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

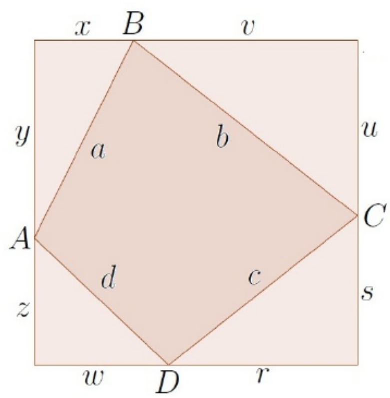
que é a única raiz real dessa equação.

Observação: Essa equação tem uma única solução real que também pode ser escrita na forma

$$x = \frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{5}{3}\right)} = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

3) Os pontos A, B, C e D estão cada um sobre lados distintos de um quadrado de lado 1. Unindo-se esses quatro pontos obtemos um quadrilátero cujos lados medem a, b, c, d. Determine o menor e o maior valor possível para a expressão $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Solução:



Usando o Teorema de Pitágoras quatro vezes, temos que

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (x^2 + y^2) + (u^2 + v^2) + (r^2 + s^2) + (z^2 + w^2)$$

Como $v = 1 - x$, $u = 1 - s$, $w = 1 - r$ e $z = 1 - y$, temos

$$S = x^2 + (1-x)^2 + s^2 + (1-s)^2 + y^2 + (1-y)^2 + r^2 + (1-r)^2$$

Observando-se o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1$ com $x \in [0,\ 1]$ temos que se trata de um arco de parábola cujo valor mínimo ocorre no vértice $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e cujo valor máximo ocorre em uma das extremidades $(0, 1)$ ou $(1, 1)$. Portanto, $\frac{1}{2} \leq x^2 + (1-x)^2 \leq 1$. Pela mesma razão, obtemos $\frac{1}{2} \leq s^2 + (1-s)^2 \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq y^2+(1-y)^2 \leq 1$ e $\frac{1}{2} \leq r^2+(1-r)^2 \leq 1$. Somando-se essas quatro desigualdades, obtemos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \leq x^2+(1-x)^2+s^2+(1-s)^2+y^2+(1-y)^2+r^2+(1-r)^2 \leq 1+1+1+1,$$

ou seja, $2 \leq S \leq 4$. Concluímos então que o menor valor de $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é 2 e o maior valor é 4.

4) A função $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é definida pelos valores da seguinte tabela

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Determine o valor de $(\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2013 \quad \text{vezes}})(4)$.

Solução: Pode ser verificado diretamente que

- $f(4) = 5$,
- $(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(5) = 2$,

- $(f \circ f \circ f)(4) = f(f(f(4))) = f(2) = 1$,
- $(f \circ f \circ f \circ f)(4) = f(f(f(f(4)))) = f(1) = 4$,
- $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(4) = f(f(f(f(f(4))))) = f(4) = 5$,
- $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(4) = f(f(f(f(f(f(4)))))) = f(5) = 2$,
- $\vdots$

Sendo assim, os valores $5, 2, 1, 4$ se repetem nessa ordem, de quatro em quatro, no cálculo de $(f \circ \cdots \circ f)(4)$. Como $2013 = 4 \times 503 + 1$, temos que

$$(\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2013 \quad \text{vezes}})(4) = f(4) = 5.$$

5) Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{2011 \cdot 2013},$$

na qual observamos o seguinte:

- o denominador de cada uma das frações é o produto de dois ímpares consecutivos escolhidos de 1 a 2013;
- cada ímpar de 3 a 2011 aparece uma vez nos denominadores de duas frações distintas.

Sugestão: *Determine valores de A e B tais que* $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$.

Solução: O termo geral do somatório é $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Inicialmente, vamos tentar escrever essa fração como soma de outras duas frações mais simples:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

que equivale a $1 = A(2n+1) + B(2n-1)$ que é o mesmo que $(2A+2B)n + (A-B) = 1$. Para que essa igualdade seja válida para todo valor de n, devemos ter $2A + 2B = 0$ e

$A-B=1$. Multiplicando-se a segunda equação por 2 e somando-se com a primeira, obtemos: $4A=2$, ou seja, $A=\frac{1}{2}$. Como $B=-A$, temos $B=-\frac{1}{2}$. Dessa forma, obtivemos que

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Fazendo agora $n=1,2,3,\ldots 1006$, obtemos que

- $n=1 \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$
- $n=2 \Rightarrow \frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$
- $n=3 \Rightarrow \frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1}{10}-\frac{1}{14}$
- $n=4 \Rightarrow \frac{1}{7\cdot 9}=\frac{1}{14}-\frac{1}{18}$
- $\vdots \qquad \vdots$
- $n=1006 \Rightarrow \frac{1}{2011\cdot 2013}=\frac{1}{4022}-\frac{1}{4026}$

Somando-se todas essas igualdades, membro a membro, obtemos

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2011\cdot 2013}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{4022}-\frac{1}{4026},$$

ou seja,

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4026}=\frac{2012}{4026}=\frac{1006}{2013}.$$