

1. Caso tiremos 30 bolas, não temos como garantir que existam 10 da mesma cor, pois podemos tirar as 10 que não sabemos se são brancas ou pretas, e, das 20 restantes podemos ter 9 de uma cor, 9 de outra e as outras duas restantes, de uma outra cor.

O ideal então seria retirarmos 10 bolas e mais $9+9+9+1$, porque daí mesmo que tiremos aquelas 10 que podem ser brancas ou pretas e mesmo que retiremos 9 de cada uma das cores restantes, aquela $+1$ forçará a ser de uma das cores restantes, portanto garantindo que existem, pelo menos, 10 da mesma cor.

Daí, o número mínimo de bolas a serem retiradas para garantirmos que, pelo menos 10 têm a mesma cor é 38.

2. Primeiro observamos que os triângulos AEB e EFH são congruentes porque, têm seus ângulos internos iguais e possuem um lado em comum. O ângulo $\hat{A}BE$ é igual ao ângulo $\hat{F}EH$, portanto, as medidas dos lados AB e EH são iguais, bem como as medidas dos lados AE e FH . Para calcularmos a área solicitada, precisamos calcular EF^2 . Mas, pelo Teorema de Pitágoras,

$$EF^2 = EH^2 + FH^2 = AB^2 + FH^2 = 30 + 20 = 50$$

3. Vamos denotar por x o número de pessoas famintas e por y o número de pessoas normais. Mesmo que as pessoas comam o máximo daquilo que querem comer, isto é, cada faminta coma 7 pedaços e cada normal coma 3, temos que de 5 pizzas (=60 fatias) irão sobrar pedaços. Isso quer dizer que

$$7x + 3y < 60.$$

Por outro lado, se cada pessoa comer o mínimo que pode comer, as 4 pizzas (=48 fatias) não serão suficientes para todos. Isso quer dizer que

$$6x + 2y > 48.$$

Como x e y são números naturais, basta efetuarmos algumas tentativas para encontrá-los. Perceba que $x < 9$. Veja a tabela a seguir:

x	y
8	1
7	Deve ser ≥ 4 , pela segunda inequação e ≤ 3 , pela primeira inequação
6	Deve ser ≥ 7 , pela segunda inequação e ≤ 5 , pela primeira inequação
5	Deve ser ≥ 10 , pela segunda inequação e ≤ 8 , pela primeira inequação
4	Deve ser > 12 , pela segunda inequação e ≤ 10 , pela primeira inequação
3	Deve ser > 15 , pela segunda inequação e < 13 , pela primeira inequação
2	Deve ser > 18 , pela segunda inequação e ≤ 15 , pela primeira inequação
1	Deve ser > 21 , pela segunda inequação e < 21 , pela primeira inequação

Logo, a única possibilidade é $x = 8$ e $y = 1$, ou seja, foram 9 pessoas à pizzaria, sendo que 8 estavam famintas.

4. Denotando por x e y números inteiros tais que $x^2 - y^2 = 105$, o que queremos descobrir é o número de soluções inteiras dessa equação. Observe que 105 pode ser fatorado como $105 = 3 \times 5 \times 7$. Além disso, temos que $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$. Portanto, a equação se transforma em $(x - y) \cdot (x + y) = 3 \times 5 \times 7$ e as possibilidades para solucioná-la são as seguintes:

$(x - y)$	$(x + y)$	x	y
3	35	19	16
5	21	13	8
7	15	11	4
15	7	11	-4
21	5	13	-8
35	3	19	-16
1	105	53	52
105	1	53	-52

Agora observe que uma solução da equação $x^2 - y^2 = 105$ como $x = 19, y = 16$, tem associada a ela, outras 3, que são $x = 19, y = -16$, $x = -19, y = 16$ e $x = -19, y = -16$.

Portanto, se fizermos essa contagem para todos os casos, teremos ao todo 16 maneiras diferentes de escrevermos o número 105 como uma diferença de quadrados perfeitos de inteiros.

Para verificarmos que não é possível escrever o número $106 = 53 \times 2$ como uma diferença de quadrados perfeitos de números inteiros, podemos tentar repetir o argumento anterior. Chegaríamos nos seguintes sistemas, com suas respectivas soluções.

$(x - y)$	$(x + y)$	x	y
2	53	27,5	25,5
53	2	27,5	-25,5

Como as únicas possibilidades são essas, e as soluções não são inteiras, vemos que o número 106 não pode ser escrito como uma diferença de quadrados perfeitos de números inteiros.

5. Se André estiver falando a verdade, então Rafael também fala a verdade, o que não pode acontecer, pois só um deles fala a verdade. Logo André mente e o culpado não é Renato. Por um raciocínio análogo, Renato também é mentiroso. Como apenas um fala a verdade, concluímos que João fala a verdade quando diz que Renato é mentiroso. Daí concluímos que Rafael é mentiroso e como ele diz que não é o culpado, somos levados a crer que isso é mentira e, portanto, o culpado é Rafael.