

Gabarito da Prova do Nível 1 da OPM-2013

1) Observe que:

- Para obtermos a menor soma, devemos tomar os números 1034 e 25 ou 1024 e 35, para os quais a soma é 1059.
- Para obtermos a menor diferença, devemos tomar os números 9876 e 10, para os quais a diferença é 9866.

2) Observe que:

- de 1 até 13, o número 1 aparece 6 vezes.
- de 14 até 20, o número 1 aparece 6 vezes.
- de 21 até 90, o número 1 aparece 7 vezes.
- de 91 até 100, o número 1 aparece 2 vezes.

Portanto, de 1 até 100, o número 1 aparece 21 vezes. Agora note que:

- de 101 até 110, o número 1 aparece 12 vezes.
- de 111 até 120, o número 1 aparece 20 vezes.
- de 121 até 130, o número 1 aparece 11 vezes.
- de 131 até 140, o número 1 aparece 11 vezes.
- de 141 até 150, o número 1 aparece 11 vezes.
- de 151 até 160, o número 1 aparece 11 vezes.
- de 161 até 170, o número 1 aparece 11 vezes.
- de 171 até 180, o número 1 aparece 11 vezes.
- de 181 até 190, o número 1 aparece 11 vezes.

Até o número 180 teremos escrito o número 1 exatamente 119 vezes. Portanto, o máximo termo que podemos escrever para fazer o 1 aparecer menos de 125 vezes é o termo 184.

3) Caso tivessem sido vendidos todos os ingressos, eles arrecadariam 5700 reais. Para ter a mesma arrecadação, vendendo os ingressos a 20 reais, eles venderam $\frac{380 \times 15}{20} = 19 \times 15 = 285$. Como eram 380 lugares, temos que $380 - 285 = 95$ lugares foram cedidos às autoridades.

4) Observa-se que o último algarismo se repete de quatro em quatro vezes: começa

2, depois 4, em seguida 8, depois 6, então volta 2, 4, 8, 6, ... Para descobrirmos em qual o algarismo termina o número 2^{2013} , basta encontrarmos em qual grupo se encaixa a potência 2013. Para isso, devemos observar que:

1. No grupo de potências que terminam em 2, os expoentes deixam resto 1, quando divididos por 4,
2. No grupo de potências que terminam em 4, os expoentes deixam resto 2, quando divididos por 4,
3. No grupo de potências que terminam em 8, os expoentes deixam resto 3, quando divididos por 4,
4. No grupo de potências que terminam em 6, os expoentes deixam resto 0, quando divididos por 4.

Como $2013 = 4 \times 503 + 1$, temos que 2013 deixa resto 1 quando dividido por 4 e, portanto, 2^{2013} termina em 2.

5) Vamos denotar por:

- p o número de páginas do livro,
- q o número de dias que se leva para ler o livro, lendo-se 5 páginas por dia,
- r o número de dias que se leva para ler o livro, lendo-se 3 páginas por dia.

Do enunciado, tiramos que $p = 5q$, $q = 3r$ e $q = r - 16$. Portanto, $5(r - 16) = 3r$, donde $r = 40$, $q = 24$ e $p = 120$. Portanto, o número de páginas do livro é 120.