Olimpíada Pessoense de Matemática 2012
Prova Nível: 2

1. Verifique que se x, y, z, w são números reais, então
$$(x+y+z+w)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+w^2). \tag{1}$$
Sejam a, b, c, d e e números reais positivos tais que
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \quad \text{e} \quad a+b+c+d+e=8. \tag{2}$$
Determinar o valor máximo de e.

2. Um arame de $36cm$ de comprimento deve ser cortado em dois pedaços, um dos quais será torcido de modo a formar um quadrado e o outro, a formar um triângulo equilátero. De que modo deverá ser cortado para que a soma das áreas das regiões limitadas pelas figuras obtidas seja mínima?

3. Sabendo que k e m são as raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 2cx + c^2 - 2c - 1$, determinar todos os valores reais de c tais que
$$\frac{(k-m)^2-2}{(k+m)^2+2}$$
seja um número inteiro.

4. Um fazendeiro calcula que sua colheita de batatas no presente momento deverá atingir 120 sacos, no valor de $\$25,00$ por saco. Se esperar mais tempo, sua colheita aumentará de 20 sacos por semana, mas o preço baixará de $\$2,50$ por saco e por semana. Quantas semanas deverá esperar para obter o máximo rendimento?

5. Mostre que o polinômio
$$p(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$
não possui raizes reais. Note que uma raiz real do polinômio $p(x)$ é o valor real de x tal que $p(x) = 0$.

6. Seja $f(x) = ax^4 + bx + c$, com $a > 0$. Mostre que se $0 < t < 1$, então para todo x e z pertencente ao conjunto dos números reais,
$$f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z).$$

GABARITO

1. Primeiro note que

   $$(x+y+z+w)^2 = x^2+2xy+y^2+2xz+2xw+2yz+2yw+z^2+2zw+w^2.$$

   Como

   $$2xy \leq x^2+y^2 \text{ e } 2xz \leq x^2+z^2$$

   temos que

   $$(x+y+z+w)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+w^2).$$

   Observe que

   $$a+b+c+d = 8-e \text{ e } a^2+b^2+c^2+d^2 = 16-e^2.$$

   Assim, pela desigualdade (1), obtemos

   $$(8-e)^2 \leq 4(16-e^2) \Leftrightarrow 5e^2-16e \leq 0 \Leftrightarrow e(5e-16) \leq 0.$$

   Portanto, o valor máximo de e é $\frac{16}{5}$.

2. Sejam x e y os comprimentos dos pedaços a serem cortados para formarem o quadrado e triângulo equilátero, respectivamente. Então

   $$x+y=36.$$

   Note que os lados do quadrado é igual $\frac{x}{4}$ e do triângulo $\frac{y}{6}$. Assim, a área do quadrado é igual a

   $$A_Q = \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

   e a área do triângulo é igual a

   $$A_T = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\frac{y}{3}\frac{\sqrt{5}y}{6}$$

   Logo, a área total é igual a

   $$A = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{5}}{36}y^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{5}}{36}(36-x)^2,$$

   cujo ponto de máximo é

   $$x = \frac{72\sqrt{5}}{36+\sqrt{5}} \simeq 4,21.$$

   Portanto,

   $$y \simeq 36 - 4,21 \simeq 31,7.$$

3. Como k e m são as raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 2cx + c^2 - 2c - 1$ temos que
$$k + m = 2c \text{ e } km = c^2 - 2c - 1.$$
Logo,
$$(k+m)^2 + 2 = 4c^2 + 2$$
e
$$\begin{aligned}(k-m)^2 - 2 &= (k+m)^2 - 4km - 2\\ &= 8c + 2.\end{aligned}$$
Assim,
$$\frac{(k-m)^2 - 2}{(k+m)^2 + 2} = \frac{8c+2}{4c^2+2} = \frac{4c+1}{2c^2+1} \in \mathbb{Z}$$
se, e somente se, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que
$$4c + 1 = (2c^2+1)n \Leftrightarrow 2nc^2 - 4c + n - 1 = 0.$$
Como $c \in \mathbb{R}$ devemos ter
$$\Delta = (-4)^2 - 4(2n)(n-1) \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow n \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$
Para $n = -1$, obtemos $c = -1$. Continue.

4. Sejam y o rendimento e x o número de semanas. Como a quantidade de sacos de batatas é
$$120 + 20x$$
e o preço por saco e por semana é
$$25 - 2,5x$$
temos que
$$y = (120 + 20x)(25 - 2,5x),$$
ou ainda,
$$y = 3.000 + 200x - 50x^2.$$
O máximo dessa função é igual a $x = 2$ semanas.

5. As possíveis raízes racionais do polinômio são -1 e 1. Por substituição direta vemos que elas não são raízes de $p(x)$. Note que se $x \neq 1$, então
$$p(x)(x-1) = x^7 - 1.$$
Como não existe $x \neq 1$ real tal que $x^7 = 1$, segue-se que $p(x) \neq 0$, para todo x real.

6. Mostrando que
$$(tx + (1-t)z)^4 \leq tx^4 + (1-t)z^4. \tag{3}$$
Segue-se que
$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)z) &= a(tx + (1-t)z)^4 + b(tx + (1-t)z) + c \\ &\leq t(ax^4 + bx + c) + (1-t)(az^4 + bz + c) \\ &= tf(x) + (1-t)f(z). \end{aligned}$$
Para provar (3) é suficiente verificar que
$$tx^4 + (1-t)z^4 - (tx + (1-t)z)^4 \geq 0$$