



Prova do Nível 3

Nome:..... Série:.....

Escola:.....

Observações:

1. A prova terá duração 03 (três) horas;
2. É permitido o uso de lápis e caneta esferográfica de tinta azul ou preta;
3. Cada problema deve ser resolvido em uma única folha.

Problema 1. Senhor Ptolomeu estava no centro da cidade e precisou ligar para um amigo. Daí, percebeu que seu celular estava com a bateria descarregada e resolveu ligar usando um telefone público. Mas, não lembrava o último algarismo do número do telefone de seu amigo. Se ele só tem duas unidades, qual a probabilidade de que ele consiga conversar com seu amigo, tentando ligar do telefone público?

Problema 2. Mostre que, para todo inteiro $n \geq 1$, $n + 1$ divide $\binom{2n}{n}$.

Problema 3. Mostre que a equação $2^x + 3^x = 6^x$ tem uma única solução real que pertence ao intervalo $(0, 1)$. (*Sugestão: Esboce no mesmo plano, gráficos de funções convenientes*).

Problema 4. Seja $p(x)$ o polinômio de grau 2011, com coeficientes reais, dado por

$$p(x) = \left[x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2011}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2011}\right) \right]^{2011}$$

Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 + 1$. (*Sugestão: Você pode usar números complexos!*).

Problema 5. Uma pequena loja confecciona cubos de papelão com faces coloridas. As cores das faces dos cubos são diferentes. Se a loja dispõe de 06 (seis) cores, quantos cubos distintos ela pode produzir?

Problema 6. Sobre os lados de um triângulo ABC são construídos os quadrados $ABDE$, $CAFG$ e $BCHI$. Em seguida, ligam-se os vértices desses quadrados (E com F , G com H e I com D), formando-se um hexágono $DEFGHI$. Sendo

$$\overline{AB} = 13\text{cm}, \quad \overline{BC} = 14\text{cm} \quad \overline{AC} = 15\text{cm},$$

determine a área desse hexágono.