Olimpíada Pessoense de Matemática 2011

Gabarito - Prova Nível 3

1. Vamos considerar os seguintes eventos:

$$A: \text{ Sr. Ptolomeu consegue conversar na primeira tentativa;}$$
$$B: \text{ Sr. Ptolomeu consegue conversar na segunda tentativa.}$$

   Logo, queremos determinar $P(A \cup B)$. Temos que $P(A) = 1/10$. Para que ocorra o evento B é preciso que A não ocorra. Assim,

$$P(B) = \frac{9}{10}.\frac{1}{9} = \frac{1}{10}.$$

   Portanto, $P(A \cup B) = 1/10 + 1/10 = 2/10 = 20\%$.

2. Primeiro, notemos que $\dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{n}{n+1}$ e $\dfrac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-1}$. Daí,

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \in \mathbb{N},$$

   o que prova o desejado.

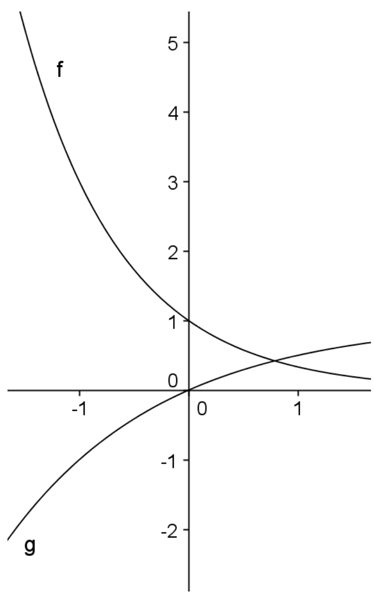


Figura 1: Gráficos de f e g (Questão 3)

3. Dividindo a equação por 6^x e fazendo operações elementares, obtemos

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Agora, esboçando no mesmo plano os gráficos das funções $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $g(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$, obtemos a Figura 1 acima, o que mostra que $f(x) = g(x)$ somente num único ponto $x \in (0, 1)$, o que responde a questão.

4. O resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 + 1$ é da forma $r(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Denotando o quociente desta divisão por $q(x)$, temos que

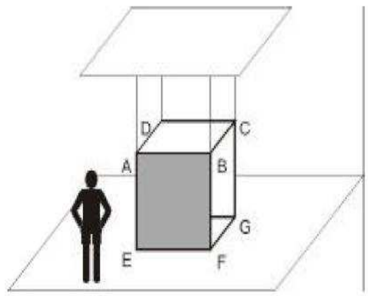
$$p(x) = q(x)(x^2 + 1) + ax + b$$

Logo, fazendo $x = i$ e usando a fórmula de De Moivre, obtemos

$$ai + b = p(i) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{2011}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{2011}\right)\right]^{2011} = \cos 2\pi + i\mathrm{sen}2\pi = 1,$$

de onde devemos ter $a = 0$ e $b = 1$. Portanto, $r(x) \equiv 1$.

5. Para facilitar o entendimento, suponhamos o cubo pendurado pelos 4 vértices de uma mesma face, de modo que duas de suas faces fiquem horizontais, e consideremos um observador fixo, em frente a uma de suas faces verticais, conforme mostra a figura abaixo.



Vejamos, inicialmente, de quantos modos diferentes o observador pode ver o cubo pintado. Para pintar a face superior, há seis escolhas de cores; para a face inferior, 5, e para as verticais, respectivamente 4, 3, 2 e 1 escolhas. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o observador pode ver o cubo pintado de:

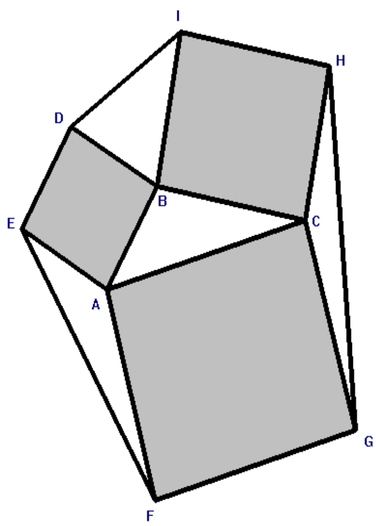
$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! \text{ modos diferentes.}$$

Entretanto, o número de modos de pintar o cubo nas condições do problema, isto é, sendo cada face com uma cor, não é 6!, pois, como veremos a seguir, o observador pode ver de 24 maneiras diferentes uma mesma pintura do cubo.
De fato, suponhamos que o cubo tenha sido pintado de uma determinada maneira, e que a face AEFB, voltada para o observador, esteja pintada de azul. Este pode ver a face do cubo pintada de azul de 4 modos diferentes; basta notar que o mesmo pode ser pendurado pelos vértices ABCD, BCGF, GFEH e AEHD (o vértice H não é visível na figura, mas é fácil de imaginar onde se encontra) e que em cada uma dessas posições a face AEFB (pintada de azul) permanece voltada para o observador.
Fazendo igual raciocínio para as 6 faces, segue-se, pelo Princípio Multiplicativo, que o observador pode ver a mesma pintura do cubo de:

$$6 \times 4 = 24 \text{ modos diferentes.}$$

Seja, então, q o número de pinturas distintas do cubo, nas condições exigidas, isto é, sendo cada face com uma cor. Como cada pintura pode ser vista de 24 modos diferentes pelo observador, as q pinturas podem ser vistas de $q \times 24$ modos diferentes. Porém, como vimos no início, esse número é 6!. Logo, $q \times 24 = 6!$ e, portanto, $q = 30$.

6. De acordo com o enunciado, obtemos a figura abaixo



Primeiramente, observemos que a área do triângulo AEF vale $13 \times 15 \times \operatorname{sen}(E\widehat{A}F)/2$. Desde que $\operatorname{sen}(E\widehat{A}F) = \operatorname{sen}(B\widehat{A}C)$ então a área do triângulo ABC tem este mesmo valor. Raciocínio análogo nos leva a concluir que as áreas dos triângulos BDI e CGH também tem este mesmo valor. Usando a fórmula de Heron, teremos que a área do triângulo ABC será

$$\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{7056} = 84.$$

Portanto, a área A do hexágono pedido é

$$A = 13^2 + 14^2 + 15^2 + (4 \times 84) = 169 + 196 + 225 + 336 = 926 \quad u.a.$$