Olimpíada Pessoense de Matemática 2011

Gabarito da Prova do Nível 2

Solução do Problema 1. Os números x e y são racionais, e além disso

$$x = 1 + \frac{234}{999} = \frac{1233}{999} \quad \text{e} \quad y = \frac{5196}{1732}.$$

Solução do Problema 2. A fim de que, os segmentos AM e AN dividam o quadrado em três partes de áreas iguais, devemos ter $\overline{CN} = L - \overline{DM}$, onde $\overline{CN}$ e $\overline{DM}$ denotam o comprimento dos segmentos CN e DM, respectivamente. Note que, se denotarmos $\overline{DM} = x$, então

$$L^2 = \frac{3}{2}Lx, \quad \text{i.e.,} \quad x = \frac{2}{3}L.$$

Solução do Problema 3. Sim. Justifique!

Solução do Problema 4. Usando soma entre vetores, temos $\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN}$, e portanto

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MC} + \overline{CN} + \overline{NB} = 2\overline{MN},$$

onde $\overline{XY}$ denota o vetor com origem em X e extremidade em Y.

Solução do Problema 5. Note que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, e perceba que $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ é o único ponto que satisfaz a igualdade

$$f(\alpha - x) = f(\alpha + x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Solução do Problema 6. Se existe uma raiz racional, temos $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ e temos também que $\Delta = b^2 - 4ac$ é um quadrado perfeito m^2, $m \in \mathbb{R}$. Sendo b é ímpar, b^2 é ímpar e, como $4ac$ é par, temos $\Delta = b^2 - 4ac$ ímpar , implicando que m^2 é ímpar que, por sua vez, implica que m é ímpar. Como $b^2 - m^2 = 4ac$ e a diferença dos quadrados de dois números ímpares é sempre um mútiplo de 8, concluí-se que $4ac$ é mútiplo de 8. Mas, sendo a e c ímpares, $4ac$ não é um mútiplo de 8, e portanto, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não têm raízes racionais.