Olimpíada Pessoense de Matemática 2011

Gabarito da Prova do Nível 1

Solução do Problema 1. As afirmações das letras **(a)** e **(b)** são ambas falsas. A argumentação e a conclusão estão corretas.

Solução do Problema 2. De fato, Mário se enganou pois da primeira vez que a pizza foi repartida ele ficou com 1/4 e Marcos com

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

Quando a pizza foi repartida pela segunda vez Mário ficou com

$$\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{48},$$

e Marcos ficou com

$$\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{5}{48}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{23}{48}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{48}=\frac{25}{192}.$$

Uma vez que

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{48}>\frac{1}{8}+\frac{25}{192},$$

Mário estava enganado.

Solução do Problema 3. $3^{2011}, 27^{14}=3^{72}, 9^{20}=3^{60}, 81^{12}=3^{48}, 243^{9}=3^{45}$.

Solução do Problema 4. Não é difícil ver que João acertou 75% dos saques por ele efetuados. Logo, João saca melhor.

Solução do Problema 5. Se $\sqrt{p_1p_2\cdots p_n}$ fosse racional, existiriam r,s números inteiros com $s\neq 0$ tais que

$$\sqrt{p_1p_2\cdots p_n}=\frac{r}{s},$$

ou seja,

$$p_1p_2\cdots p_ns^2=r^2, \tag{1}$$

o que é absurdo, pois pelo Teorema Fundamental da Aritmética, os primos $p_1,p_2,\ldots,p_n$ deveríam aparecer uma quantidade par de vezes na decomposição em fatores primos do inteiro r^2, e não uma quantidade ímpar de vezes como eles aparecem na expressão em (1).

Solução do Problema 6. Note que $\min\left\{\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right\}\leq\frac{a}{b}$ e $\min\left\{\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right\}\leq\frac{c}{d}$, o que implica

$$b\cdot\min\left\{\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right\}\leq a \tag{2}$$

e

$$d \cdot \min\left\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right\} \leq c, \tag{3}$$

somando as expressões em (2) e (3), obtemos

$$(b+d) \cdot \min\left\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right\} \leq a + c$$

e portanto

$$\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right\} \leq \frac{a+c}{b+d}.$$

A prova da desigualdade

$$\frac{a+c}{b+d} \leq \max\left\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right\}$$

é análoga.