Olimpíada Pessoense de Matemática 2010

Gabarito - Prova Nível 3

1. Vamos considerar os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} A &: \text{ O motorista que foi parado está embriagado;} \\ B &: \text{ O teste realizado acerta o estado de embriaguez;} \\ S &: \text{ O teste realizado deu positivo.} \end{aligned}$$

   Logo, o queremos determinar é

$$P(S) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{100}.\frac{80}{100} + \frac{95}{100}.\frac{20}{100} = \frac{23}{100} = 23\%.$$

2. Se $a < b+c$ então $a+a(b+c) < b+c+a(b+c)$ e, portanto, $a(1+b+c) < (a+1)(b+c)$. Desde que $a, b, c > 0$, segue que

$$\frac{a}{a+1} < \frac{b+c}{b+c+1} < \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{b+c+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$$

   como queríamos mostrar.

3. Somando-se as conhecidas fórmulas para $\cos(a+b)$ e $\cos(a-b)$, obtemos que

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

   Daí, obtemos

$$\begin{aligned} 4\cos 20^\circ - \frac{1}{\cos 80^\circ} &= \frac{4\cos 20^\circ \cos 80^\circ - 1}{\cos 80^\circ} = \frac{2(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) - 1}{\cos 80^\circ} \\ &= \frac{2(\cos 100^\circ + 1/2) - 1}{\cos 80^\circ} = \frac{2\cos 100^\circ}{\cos 80^\circ} = -\frac{2\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ} = -2. \end{aligned}$$

4. Sendo c a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b, devemos necessariamente ter $c > a$ e $c > b$. Qualquer que seja o inteiro $n > 2$, as desigualdades anteriores nos fornecem $c^n > a^n$ e $c^n > b^n$. Como o triângulo é retângulo, o teorema de Pitágoras nos diz que $c^2 = a^2 + b^2$. Daí,

$$c^n = c^2c^{n-2} = (a^2+b^2)c^{n-2} = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2} > a^2a^{n-2} + b^2b^{n-2} = a^n + b^n.$$

6. Seja $p(x)$ um polinômio satisfazendo as propriedades i) e ii). Fazendo $x = 0$ temos que $p(1) = [p(0)]^{2011} + 1$ donde $p(1) = 1$. Para $x = 1$ segue que $p(2) = [p(1)]^{2011} + 1 = 1 + 1 = 2$. Agora, fazendo $x = 2$, obtemos

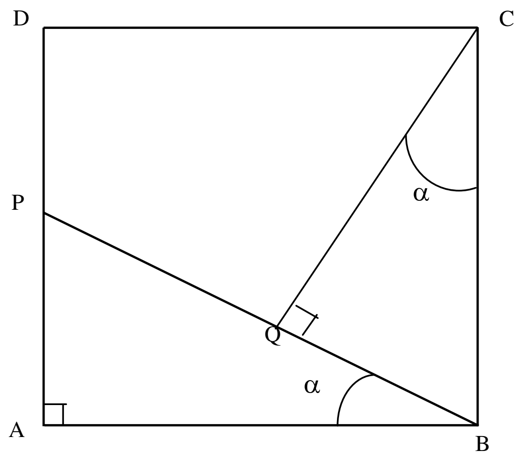
$$p(2^{2011} + 1) = [p(2)]^{2011} + 1 = 2^{2011} + 1.$$

Para o próximo passo, fazemos $x = 2^{2011} + 1$ e obtemos novamente que

$$p((2^{2011} + 1)^{2011} + 1) = [p(2^{2011} + 1)]^{2011} + 1 = (2^{2011} + 1)^{2011} + 1.$$

Prosseguindo desta forma, concluímos que existirá uma sequencia crescente infinita de pontos $0, 1, 2, 2^{2011} + 1, (2^{2011} + 1)^{2011} + 1, \ldots$ que são fixados pelo pelo polinômio $p(x)$. Assim, definindo o polinômio $q(x) = p(x) - x$, temos que $q(x)$ se anula numa sequencia infinita de valores distintos. Como todo polinômio não-nulo tem uma quantidade finita de raízes, concluímos que $q(x)$ é o polinômio nulo e, portanto, $p(x) = x$.

5. Consideremos a figura abaixo.



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$. No triângulo BCQ , o ângulo $Q\hat{B}C = 90^\circ - \alpha$ e $90^\circ - \alpha + B\hat{C}Q = 90^\circ \Rightarrow B\hat{C}Q = \alpha$, logo os triângulos BCQ e ABP são semelhantes (pois são retângulos e ambos têm um ângulo de medida α), então $\frac{\overline{BQ}}{\overline{\overline{PA}}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{BP}}} = \frac{a}{\overline{\overline{BP}}}$, e no triângulo ABP, $\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{BP}}} = \frac{a}{\overline{\overline{BP}}}$. Assim, $\frac{\overline{BQ}}{\overline{\overline{PA}}} = \frac{a}{\overline{\overline{BP}}} = \cos\alpha$.

Como queremos calcular α, tal que $A_{\Delta BCQ} = 3/4\, A_{\Delta ABP}$, e em triângulos semelhantes a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança. Portanto,

$$\frac{A_{\Delta BCQ}}{A_{\Delta ABP}} = \frac{3}{4} = \cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$