Olimpíada Pessoense de Matemática 2010
Gabarito - Prova Nível 2

1. Sejam x e x – 5 as idades de João e Maria, respectivamente. Então
   1/x+1/(x-5)=25/(x^2-5x) $\Rightarrow$ x – 5 + x = 25 $\Rightarrow$ 2x = 30 $\Rightarrow$ x = 15.
   Portanto, as idades de João e Maria são, respectivamente, 15 e 10.

2. Seja XY o número procurado. Assim temos que X + Y = 9. Logo teremos as seguintes possibilidades:
   0 + 9 = 9; 1 + 8 = 9; 2 + 7 = 9: 3 + 6 = 9; 4 + 5 = 9
   Observe que apenas o número 81 satisfaz as condições do problema, pois
   $81 = 45 + 2 \times\ 18$.
   Logo o número é 18.

3. Sejam x e x + 1 os lados desse retângulo. Então
   x.(x + 1) = 12 $\Rightarrow$ xˆ2+x-12=0 $\Rightarrow$ x=3 e x= -4.
   Como x é positivo, então teremos x = 3 como única resposta. Os lados do retângulo medem, respectivamente, 3 e 4.

4. O valor da área hachurada é:

   $$(a+b)^2 - 2 \times 1/2a^2 - 2 \times 1/2b^2 = 2ab.$$

5. a) y=f(x)=0,75+0,50x, onde x é o número de horas de permanência no Shopping.
   b) Após 4 horas o cliente pagou R$ 2,75, isto é, f(4).

6. Sejam a, b e c os lados desse triângulo, conforme figura ao lado. Então teremos:

   $$a+b+c=24$$
   $$a^2+b^2+c^2=200$$

   Como o triângulo é retângulo, tem-se: $a^2 = b^2 + c^2$.
   Logo, obtemos:$2a^2 = 200 \Rightarrow a = 10$.Substituindo esse valor de a nas equações acima, obteremos o seguinte sistema:

   $$b+c=14$$
   $$b^2+c^2=100$$

   Esse sistema nos leva a seguinte equação do segundo grau $c^2 - 14c + 48 = 0$,cujas soluções são: c = 8 e b = 6 ou c = 6 e b = 8. Portanto, os lados do triângulo são:
   a = 10, b = 8 e c = 6
   ou
   a = 10, b = 6 e c = 8.