

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Aluno: _____ Escola: _____

Olimpíada Pessoaense de Matemática 2010
Nível III

A duração da prova será de 3 horas. Cada problema vale 1 ponto. Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, nem consultas a notas ou livros.

1. Em uma cidade, a polícia realiza blitz, onde pára motoristas e faz um teste sobre o teor de álcool no sangue. Suponha que a probabilidade de que um motorista, que foi parado, esteja embriagado seja de 5% e que o teste realizado acerta o estado de embriaguez em 80% das ocasiões. Qual a probabilidade de que o teste de um motorista, que foi parado, resulte positivo?
2. Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a < b + c$. Mostre que

$$\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}.$$

3. Mostre que

$$4 \cos 20^\circ - \frac{1}{\cos 80^\circ}$$

é um número inteiro.

4. Seja n um inteiro maior que 2. Se c é a hipotenusa de um triângulo retângulo e a e b são seus catetos, prove que

$$c^n > a^n + b^n.$$

5. Um quadrado $ABCD$ tem lado de comprimento a . Sejam P um ponto pertencente ao lado AD distinto de A e α a medida do ângulo \widehat{ABP} . O segmento de reta CQ é perpendicular a BP , onde Q pertence ao segmento BP . Determine o valor de α para que a área do triângulo BCQ seja $3/4$ da área do triângulo ABP .
6. Determine os polinômios $p(x)$ que satisfazem as seguintes condições:
 - i) $p(0) = 0$;
 - ii) $p(x^{2011} + 1) = [p(x)]^{2011} + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.