Gabarito - Nível 3 - Escolas Privadas - 2009

1. a) Para se comprar algo que custe 8 cruzeiros = (7 + 1) cruzeiros basta se dar 3 notas de 5 cruzeiros e receber como troco 1 nota de 7 cruzeiros (entre muitas outras possibilidades).

   b) Para se comprar algo que custe 1 cruzeiro, basta dar 3 notas de 5 cruzeiros e receber como troco 2 notas de 7 cruzeiros. Assim, uma das possibilidades de se comprar algo que custe n cruzeiros é dar $3n$ notas de 5 cruzeiros e receber como troco $2n$ notas de 7 cruzeiros. São várias as possibilidades de se comprar algo que tenha um preço de n cruzeiros, sendo n um número inteiro.

2. A probabilidade p de ganhar na Mega Sena jogando-se seis dezenas é de $p = 1/C_6^{60}$. Agora, jogando-se nove dezenas, a probabilidade de ganhar é de $C_6^9/C_6^{60} = 84p$.

3. a)
   - ∗ Recorde-se que $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$,
   - ∗ $cos(2x) = cos(x+x) = cos^2x - sen^2x = 2cos^2x - 1$,
   - ∗ $cos(4x) = 2cos(2x)^2 - 1 = 2[2cos^2x - 1]^2 - 1 = 2[4cos^4x - 4cos^2x + 1] - 1 = 8cos^4x - 8cos^2x + 1$,
   - ∗ Usando as igualdades encontradas anteriormente:

$$\begin{aligned}
cos(5x) &= cos(4x+x) = cos(4x)cosx - sen(4x)senx \\
&= cos(4x+x) = cos(4x)cosx - [sen(2x)cos(2x) + sen(2x)cos(2x)]senx \\
&= cos(4x)cosx - [2sen(2x)cos(2x)]senx \\
&= cos(4x)cosx - [2(2senxcosx)(2cos^2x - 1)]senx \\
&= cos(4x)cosx - 4sen^2xcos^3x + 4sen^2xcosx \\
&= (8cos^5x - 8cos^3x + cosx) - 4cos^3x(1 - cos^2x) + 4cosx(1 - cos^2x) \\
&= 8cos^5x - 8cos^3x + cosx - 4cos^3x + 4cos^5x + 4cosx - 4cos^3x
\end{aligned}$$

   Portanto,

$$cos(5x) = 12cos^5x - 16cos^3x + 5cosx.$$

   b) Substituindo-se x por $18°$ na fórmula anterior, obtemos $\cos 90° = 12\cos^5 18° - 16\cos^3 18° + 5\cos 18°$, ou seja, $12\cos^5 18° - 16\cos^3 18° + 5\cos 18° = 0$ que dividindo-se por $\cos 18° \neq$

0 fornece: $12\cos^4 18° - 16\cos^2 18° + 5 = 0$. Isso significa que $\cos 18°$ é uma raiz da equação biquadrada

$$12x^4 - 16x^2 + 5 = 0.$$

As possíveis raízes racionais dessa equação são $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/4, \pm 1/6,\ \pm 1/12, \pm 5/2, \pm 5/3, \pm 5/4, \pm 5/6, \pm 5/12$. Como nenhum desses valores é raiz da equação, concluímos que a equação não tem raízes racionais e, consequentemente, $\cos 18°$ não é racional.

4. Existem 6 possibilidades para o primeiro algarismo, 5 para o segundo e 4 para o terceiro; existem 3 possibilidades para o caracter do meio e existem 10 possibilidades para cada uma das três letras finais.

6	5	4	3	10	10	10

Logo, o total de senhas assim construídas é de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 360000$.

5. – Inicialmente, vamos calcular a área do segmento circular AB que aparece sombreado na figura. Por hipótese, essa área deve ser igual à metade da área do semicírculo, ou seja, deve ser igual a $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\pi \cdot 10^2)) = 25\pi$.

   – Seja O o centro do semicírculo e $\theta = \widehat{AOB}$ o ângulo central do setor circular AOB. A área do triângulo AOB (que pode ser calculada de várias maneiras) é igual a $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot sen\theta = 50 sen\theta$.

   – A altura h do triângulo AOB, divide esse triângulo em dois triângulos congruentes nos quais um dos ângulos internos desses triângulos (adjacentes a h) é igual a $\theta/2$. Usando a definição de cosseno, temos que $cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{10}$ e, daí, obtemos que $\theta = 2arccos(\frac{h}{10})$

   – Se o ângulo θ medisse π radianos, teríamos a área do semicírculo que é de 50π. Supondo que a área do setor circular AOB seja igual a S, por uma proporção simples temos que $\frac{S}{50\pi} = \frac{\theta}{\pi}$ de onde obtemos que $S = 50\theta$.

   – Subtraindo-se a área do triângulo AOB da área do setor AOB, obtemos: $50\theta - 50sen\theta = 25\pi$, ou seja, $2\theta - 2sen\theta = \pi$ que é o mesmo que $2\theta - 2(2sen\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}) = \pi$, isto é, $2\theta - 4cos\frac{\theta}{2}\sqrt{1 - cos^2\frac{\theta}{2}} = \pi$.

   – Substituindo-se o θ encontrado anteriormente na última equação e dividindo-se tudo por 4, obtemos:

$$arccos(\frac{h}{10}) - \frac{h}{10}\sqrt{1 - \frac{h^2}{100}} = \frac{\pi}{4}$$

   e essa é a equação procurada.

6. $2arctgh\left(\frac{1}{5}\right) + 2arctgh\left(\frac{1}{7}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right)\right] + 2\left[\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right)\right] = \log_e\frac{6}{4} + \log_e\frac{8}{6} = \log_e 2.$