Gabarito - Nível 3 - Escolas Públicas - 2009

1. A medida do lado do quadrado deve ser um divisor de 120 e de 96. Como o lado deve ser o maior possível, essa medida deve ser o $m.d.c(120,96)$. Temos que: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $96 = 2^5 \cdot 3$ o que implica $m.d.c(120,96) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Portanto, os terrenos menores devem ser quadrados de lado $24m$.

2. Os 28 números são: 1, 2, 3, 2^2, 5, $2 \cdot 3$, 7, 2^3, 3^2, $2 \cdot 5$, 11, $3 \cdot 2^2$, 13, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 5$, 2^4, 17, $2 \cdot 3^2$, 19, $2^2 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $2 \cdot 11$, 23, $3 \cdot 2^3$, 5^2, $2 \cdot 13$, 3^3, $2^2 \cdot 7$. Multiplicando-se todos esses números, obtemos: $2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$. Assim, deve ser retirado do produto $(2 \cdot 3) \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$, ou seja, devem ser retirados os elementos 6, 17, 19 e 23.

3. A probabilidade P de que não passe corrente no circuito será $P = 1 - p$, onde p é a probabilidade de que passe corrente no circuito. Mas, para passar corrente no circuito os componentes C_1, C_2 e C_3 não devem falhar. Logo, como eles funcionam de forma independente, a probabilidade dos componentes não falharem é

$$p = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0,9 \times 0,9 \times 0,8 = 0,648$$

Portanto, segue que $P = 0,352 = 35,2\%$.

4. Existe 1 possibilidade para a primeira letra, existem 26 possibilidades para a segunda, 26 possibilidades para a terceira, existem 10 possibilidades para o primeiro, segundo ou terceiro algarismos e 1 possibilidade para o último algarismo.

1	26	26	10	10	10	1

Logo, o total de placas assim construídas é de $1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 676000$.

5. $2arctgh\left(\frac{1}{5}\right) + 2arctgh\left(\frac{1}{7}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right)\right] + 2\left[\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right)\right] = \log_e\frac{6}{4} + \log_e\frac{8}{6} = \log_e 2.$

6. – Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, temos $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \alpha$. Como $\widehat{BOC} = 36°$ e $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$, temos $36° + \alpha + \alpha = 180°$ e daí obtemos $\alpha = 72°$ o que implica $\widehat{OAB} = 180° - 72° =$

$108^\circ \Rightarrow \widehat{ABO} = 180^\circ - 108^\circ - 36^\circ = 36^\circ$ e daí temos que $\overline{OA} = \ell$.

- Da figura, temos: $\overline{AC} = \ell\cos\alpha + \ell\cos\alpha = 2\ell\cos\alpha \Rightarrow \overline{OC} = 1 = \ell + 2\ell\cos\alpha$.
- Temos também que $\cos 36^\circ = \ell + \ell\cos\alpha$ que dividindo pela igualdade anterior, fornece $\cos 36^\circ = \frac{1+\cos\alpha}{1+2\cos\alpha}$. Como $\cos\alpha = \cos(2\cdot 36^\circ) = 2\cos^2 36^\circ - 1$, temos $\cos 36^\circ = \frac{1+(2\cos^2 36^\circ - 1)}{1+2(2\cos^2 36^\circ - 1)} \Rightarrow 1 = \frac{2\cos 36^\circ}{4\cos^2 36^\circ - 1} \Rightarrow 4\cos^2 36^\circ - 2\cos 36^\circ - 1 = 0$.
- Portanto, $\cos 36^\circ$ é a raiz positiva da equação $4x^2 - 2x - 1 = 0$ de onde finalmente obtemos que $\cos 36^\circ = \frac{2+\sqrt{20}}{8}$, ou seja,

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$