Gabarito - Nível 2 - Escolas Privadas - 2009

1. Seja n natural, então $n+1$ é seu sucessor, utilizando esse raciocínio verificamos que

$$n(n+1)(n+2)(n+3)$$

é um produto de 4 naturais consecutivos.
Observe que a soma

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

pode ser decomposta seguindo o procedimento abaixo.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+n)(n^2+5n+6)+1$$

$$=n^4+6n^3+11n^2+6n+1=n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1$$

$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2.$$

Portanto, esta soma é um quadrado perfeito.

2. A partir do triângulo ADC obtemos:

$$\frac{\hat{A}}{2}+115^\circ+\frac{\hat{C}}{2}=180^\circ \Longrightarrow \hat{A}+\hat{C}=130^\circ.$$

Logo $\hat{B}=50^\circ$.

3. Seja n um inteiro positivo.
Sejam $n+1, n+2, ..., n+k$ os consecutivos de $n, n+1, n+2, ..., n+(k-1)$, respectivamente.
Observe que a soma dos primeiros k números consecutivos pode ser deduzida, veja tabela:

k	Soma dos k números consecutivos $\Rightarrow n+(n+1)+(n+2)+...+[n+(k-1)]$
2	$n+(n+1)=2n+1$
3	$n+(n+1)+(n+2)=3n+3$
4	$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$
$\vdots$	$\vdots$
k	$n+(n+1)+(n+2)+...+[n+(k-1)]=kn+\frac{k(k-1)}{2}$

Então queremos descobrir os valores de $k\geq 2$, tais que

$$kn+\frac{k(k-1)}{2}=2009. \ (1)$$

Faremos isto analisando k.

Caso 1: k é par. Então podemos assumir que $k = 2k_1$ para $k_1 \geq 1$. Aplicando em (1), temos:

$$2k_1 n + k_1(2k_1 - 1) = 2009 = 7^2 \cdot 41$$

Donde concluímos que k_1 é um dos divisores de $2009 = 7^2 \cdot 41$. Assim $k_1 \in \{1, 7, 7^2, 41, 7 \cdot 41, 7^2 \cdot 41\}$. E temos:

k_1	$k = 2k_1$	$kn + \frac{k(k-1)}{2}$	n
1	2	$2n + 1$	1004
7	14	$14n + 91$	137
49	98	$98n + 4735$	-28
41			negativo
$7 \cdot 41$			negativo
$7^2 \cdot 41$			negativo

Caso 2: k é ímpar.
Então $k = 2k_1 + 1$, para $k_1 \geq 1$. Aplicando em (1), temos:

$$(2k_1 + 1)n + (2k_1 + 1)k_1 = 2009 = 7^2 \cdot 41$$

Donde concluímos que $k = 2k_1 + 1$ é uma divisor de 2009 e portanto $k \in \{1, 7, 7^2, 41, 7 \cdot 41, 7^2 \cdot 41\}$. Sabemos que $k \geq 2$. Assim temos que:

k	$kn + \frac{k(k-1)}{2}$	n
7	$7n + 21$	284
7^2	$49n + 1176$	17
41	$41n + 820$	29
$7 \cdot 41$	$287n + 41041$	negativo
$7^2 \cdot 41$		negativo

Assim podemos escrever 2009 como soma de dois ou mais números inteiros positivos consecutivos de 5 maneiras diferentes.

4. Observamos que um número x positivo com três dígitos quando multiplicado por 6 ou por 7 resulta em outro número que possui no mínimo 3 e no máximo 4 dígitos. Notemos que 999, o maior número inteiro positivo de três dígitos, pode ser escrito como $166 \cdot 6 + 3$ ou $142 \cdot 7 + 5$. Donde concluímos que 166 é o maior número inteiro positivo de três dígitos que multiplicado por 6 resulta em outro número de três dígitos. Analogamente, 142 é o maior número inteiro positivo de três dígitos que multiplicado por 7 tem como resultado um outro número com três dígitos.
Daí, temos que 167 é o menor número inteiro positivo que multiplicado por 6 resulta em um outro número com 4 dígitos, e também, que 143 é o menor dos números inteiros positivos que multiplicado por 7 tem como resultado um número de 4 dígitos. Assim, se $142 < x < 167$, temos que os resultados dos produtos de x por 6 e por 7 têm quantidades de dígitos diferentes. Como temos 900 números inteiros positivos com três algarismos e temos 24 números inteiros entre 142 e 167, verificamos, então que 876 números inteiros positivos de três algarismos quando multiplicados por 6 ou por 7 têm resultados com a mesma quantidade de dígitos.

5. Como o octógono é regular temos que o retângulo $ABCD$ é um quadrado, e , portanto, os triângulos retirados são isósceles, possuem um ângulo reto e tem hipotenusa igual a $4cm$, de modo que cada um de seus catetos tem medida igual a $2\sqrt{2}cm$. Logo, a área A_1 de cada um desses triângulos é $4cm^2$. Agora, notemos que a medida de cada lado do quadrado corresponde a $(4+2\sqrt{2})cm$, portanto a área A do quadrado é $(4+4\sqrt{2})^2 = 16(3+2\sqrt{2})cm^2$.
   Temos também que a área A_2 do octógono pode ser obtida pela expressão:

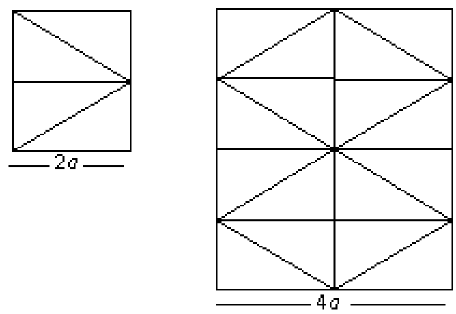
$$A_2 = A - 4A_1,$$

   portanto, $A_2 = 32(1+\sqrt{2})cm^2$. Desse modo temos que a porcentagem P da área do octógono em relação ao retângulo $ABCD$ pode ser calculada por

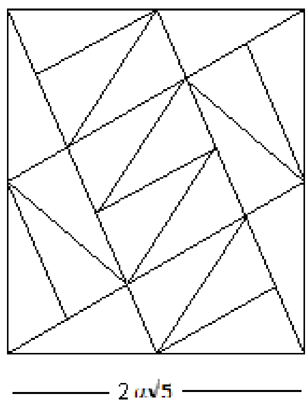
$$P = \frac{A_2}{A} \cdot 100\%,$$

   donde concluímos que $P \approx 82,84\%$ (considerando $\sqrt{2} = 1,4142$).

6. Primeiro note que é possível montar, por justaposição das peças, dois quadrados, o primeiro deles com exatamente quatro peças e o segundo com as dezesseis peças restantes, conforme ilustra a figura abaixo.



   Agora, como o primeiro tem lado $2a$ cm e o segundo $4a$ cm, segue-se pelo Teorema de Pitágoras que existe um terceiro quadrado de lado L cuja área é $L^2 = (2a)^2 + (4a)^2$, ou seja $L = 2a\sqrt{5}$ cm é a medida do lado correspondente ao terceiro quadrado, o qual tem a sua montagem representada na figura seguinte.



Obs: As figuras são meramente ilustrativas.