Gabarito - Nível 2 - Escolas Públicas - 2009

1. Como $\alpha = 72° = \dfrac{360°}{5}$, o arco de C_2 que corresponde ao deslocamento da posição 1 para a posição 2, equivale a $\dfrac{1}{5} \cdot 2\pi R_2$. Por outro lado, este mesmo deslocamento equivale ao comprimento de C_1, isto é, $2\pi R_1$. Daí, podemos concluir que:

$$\frac{1}{5} \cdot 2\pi R_2 = 2\pi R^1 \Longrightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{5}.$$

2. Observe que

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Daí,

$$1^2 = 2 + 2xy,$$

donde segue que

$$xy = -\frac{1}{2}.$$

Agora note que

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Logo,

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y).$$

Desse modo,

$$x^3 + y^3 = 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)1 = \frac{5}{2}.$$

3. Observe que $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{C}} = 180°$, como $\hat{\mathrm{A}} = 30°$, segue que $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{C}} = 150°$.
Como por hipótese, ABC é isósceles de base BC, temos que $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{C}} = 75°$.
Temos também que, $\hat{\mathrm{C}} = \mathrm{D\hat{C}A} + \mathrm{D\hat{C}B}$. Como por hipótese, BDC é isosceles de base BD, segue que $\hat{\mathrm{D}} = \hat{\mathrm{B}} = 75°$. Logo, $\mathrm{D\hat{C}B} = 30°$ e, portanto, $\mathrm{D\hat{C}A} = 45°$.

4. Para que o triângulo possa ser construído, x deve satisfazer a desigualdade

$$8 - 6 < x < 8 + 6 \Longrightarrow 2 < x < 14.$$

Como x é um número natural, por hipótese, segue-se que os elementos do conjunto

$$X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\},$$

apresenta todas as possibilidades para valores de x. Como dois dos lados do triângulo ABC medem $6cm$ e $8cm$, quando $x = 10 \in X$, segue-se que o triângulo ABC é retângulo, pois $10^2 = 6^2 + 8^2$.

Portanto, é possível o triângulo ABC ser retângulo. Como $6, 8 \in X$, segue-se que existem duas possibilidades para o triângulo ABC possuir dois lados de medidas iguais. Em uma delas os lados medem $6cm, 6cm$ e $8cm$ e na outra $6cm, 8cm$ e $8cm$. Portanto, é possível o triângulo ser isósceles.

5. Observamos que um número x positivo com três dígitos quando multiplicado por 6 ou por 7 resulta em outro número que possui no mínimo 3 e no máximo 4 dígitos. Notemos que 999, o maior número inteiro positivo de três dígitos, pode ser escrito como $166 \cdot 6 + 3$ ou $142 \cdot 7 + 5$. Donde concluímos que 166 é o maior número inteiro positivo de três dígitos que multiplicado por 6 resulta em outro número de três dígitos. Analogamente, 142 é o maior número inteiro positivo de três dígitos que multiplicado por 7 tem como resultado um outro número com três dígitos.
   Daí, temos que 167 é o menor número inteiro positivo que multiplicado por 6 resulta em um outro número com 4 dígitos, e também, que 143 é o menor dos números inteiros positivos que multiplicado por 7 tem como resultado um número de 4 dígitos. Assim, se $142 < x < 167$, temos que os resultados dos produtos de x por 6 e por 7 têm quantidades de dígitos diferentes. Como temos 900 números inteiros positivos com três algarismos e temos 24 números inteiros entre 142 e 167, verificamos, então que 876 números inteiros positivos de três algarismos quando multiplicados por 6 ou por 7 têm resultados com a mesma quantidade de dígitos.

6. Observe que $AB = DC = 100m$, $BC = AD = 60m$.
   Uma volta completa V corresponde ao percurso feito nos lados AB e CD e nas duas semicircunferências de diâmetros BC e AD. Logo $V = 2 \cdot 100m + 2 \cdot \pi \cdot 30m = 200m + 180m = 380m$.
   O percurso completo P pode ser calculado pela expressão a seguir:

$$P = 10 \cdot V.$$

   Portanto, $P = 10 \cdot 380m = 3800m = 3, 8$ quilômetros.