1) Qual é o maior, $\sqrt{10}+\sqrt{13}$ ou $\sqrt{11}+\sqrt{12}$? Justifique!

Solução: Sendo $x=\sqrt{10}+\sqrt{13}$ e $y=\sqrt{11}+\sqrt{12}$, temos $x^2=10+2\sqrt{10}\sqrt{13}+13$ e $y^2=11+2\sqrt{11}\sqrt{12}+12$, ou seja, $x^2=23+2\sqrt{130}$ e $y^2=23+2\sqrt{132}$. Como x e y são ambos positivos e $x^2<y^2$, temos que $x<y$. Portanto, o maior é $\sqrt{11}+\sqrt{12}$.

2) Se a,b e c forem três números dois a dois distintos, justifique por qual motivo a expressão

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

não pode ser nula.

Solução: Temos:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=$$

$$a^2(c-a+a-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=$$
$$a^2(c-a)+a^2(a-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=$$
$$(c-a)(a^2-b^2)+(a-b)(a^2-c^2)=$$
$$(c-a)(a+b)(a-b)+(a-b)(a-c)(a+c)=$$
$$(c-a)(a-b)[(a+b)-(a+c)]=(c-a)(a-b)(b-c)\neq 0 \text{ se } a\neq b \text{ e } a\neq c \text{ e } b\neq c.$$

3) Seja $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n)=\begin{cases} n-3, & \text{se} \quad n\geq 1000 \\ f(f(n+5)), & \text{se} \quad n<1000. \end{cases}$$

Calcule o valor de $f(84)$.

Solução: Da definição de f, obtemos que $f(1000)=997$, $f(1001)=998$, $f(1002)=999$, $f(1003)=1000$, $f(1004)=1001$, etc.
Obtemos também que

- $f(999)=f(f(1004))=f(1001)=998$,
- $f(998)=f(f(1003))=f(1000)=997$,
- $f(997)=f(f(1002))=f(999)=998$,
- $f(996)=f(f(1001))=f(998)=997$,

- $f(995) = f(f(1000)) = f(997) = 998$,
- $f(994) = f(f(999)) = f(998) = 997$, etc.

Assim, aplicando-se f a um valor $n < 1000$, obtemos como resultado 998 se n for ímpar ou 997 se n for par. Deduzimos então que $f(84) = 997$.

4) Um número é dito triangular, quando ele é da forma $1 + 2 + ... + n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. É verdade que o número 666 é triangular? Justifique!

Solução: a) Se 666 é um número triangular, ele poderá ser escrito da seguinte forma:

$$1 + 2 + 3 + ... + n - 1 + n.$$

Então se invertermos a ordem das parcelas e somarmos da seguinte forma:

$$(1+n)+(2+n-1)+...+(n-1+2)+(n+1) = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)}_{n}.$$

Obteremos que:

$$(n+1)n = 2 \cdot 666 \Rightarrow n^2 + n - 1332 = 0 \Rightarrow n = 36 \text{ ou } n = -37$$

Como $n \in \mathbb{N}$, verificamos que $n = 36$ para que 666 seja um número triangular.

5) Nas figuras 1 e 2 abaixo, é verdade que a soma das medidas dos oito ângulos destacados na figura 1 é igual à soma das medidas dos seis ângulos destacados na figura 2? Justifique sua resposta!

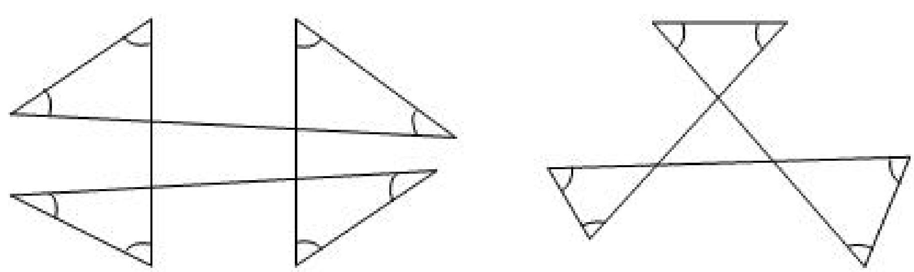

Figura 1 Figura 2

Solução: Sejam a, b, c, d, e, f, g, h os ângulos indicados na figura 1 e i, j, k, l, m, n os ângulos indicados na figura 2 abaixo:

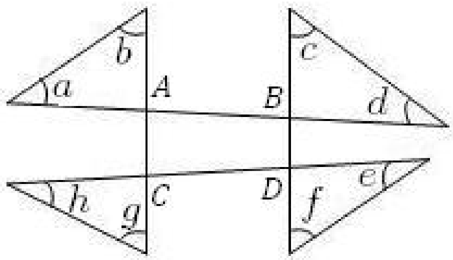

Figura 1

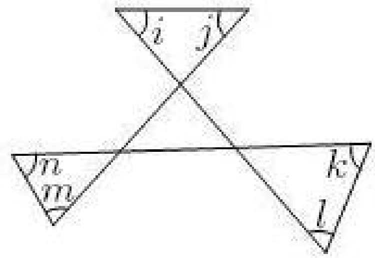

Figura 2

Como cada ângulos interno do quadrilátero $ABCD$ é opostos pelo vértice a cada um dos ângulos não indicados nos triângulos, concluímos que as medidas dos ângulos internos do quadrilátero são:

$$180^o - (a+b),\ 180^o - (c+d),\ 180^o - (e+f),\ 180^o - (g+h).$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º teremos:

$$(180^o-(a+b))+(180^o-(c+d))+(180^o-(e+f))+(180^o-(g+h)) = 360^o \Rightarrow$$

$$a+b+c+d+e+f+g+h = 360^\circ.$$

Ou seja, a soma dos ângulos indicados na figura 1 é igual a 360º. Analogamente, concluímos que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo central representado na figura 2 é dada por:

$$(180^o - (i+j)) + (180^o - (k+l)) + (180^o - (m+n)) = 180^o \Rightarrow$$

$$(i+j+k+l+m+n) = 360^\circ.$$

Logo, a soma dos ângulos indicados na figura 2 também é igual a 360º. Assim, podemos observar que a soma das medidas dos oito ângulos destacados na figura 1 é igual à soma das medidas dos seis ângulos destacados na figura 2.

6) Três irmãos e seu cachorro foram à feira de Oitizeiro comprar um balaio de mangas, mas decidiram comê-las no dia seguinte. À noite, o mais novo levantou-se e viu que se desse uma manga para o cachorro poderia dividir o restante em três partes iguais. Assim ele o fez, guardou a sua parte e foi dormir. Depois, o irmão mais velho acordou e percebeu que dando uma manga ao cachorro poderia dividir as que sobravam em três grupos iguais. Então ele deu uma manga para o cachorro, pegou a sua parte e foi dormir. O irmão do meio fez a mesma coisa sem que os outros dois vissem. No dia seguinte, os três acordaram, repartiram as mangas igualmente entre eles e vendo que sobrou uma, deram-na ao cachorro. Determine o menor número possível de mangas que eles compraram, sabendo que nenhuma manga foi cortada.

Solução: Utilizando-se do método por tentativas, pode-se, a partir do número de mangas recebida por cada irmão na última partilha, verificar qual o menor número que satisfaz todas as condições da situação-problema.

- Assim, partiremos do caso em que cada irmão recebesse 1 manga após a partilha. Desse modo, havia restado antes da partilha $3 \cdot 1 + 1 = 4$ mangas, logo antes do irmão do meio pegar sua parte antes de dormir, havia restado $4+2+1 = 7$ mangas, no entanto, o irmão mais velho havia deixado mangas para serem divididas entre seus 2 irmão igualmente, sem deixar resto e sem cortar nenhuma manga, como 7 é ímpar, isso não seria possível. Assim, os irmãos não poderiam receber 1 manga cada um.

- Considerando que cada um recebeu 2 mangas após a partilha, teremos que antes desta havia $2{\cdot}3+1 = 7$. Como o irmão do meio deixou mangas para serem divididas entre seus irmãos de forma igual, percebemos que o número de mangas que restaram após pegar sua parte deveria ser par, logo não poderiam ter restado 7 mangas após essa etapa. Assim, os irmãos não poderiam ter recebido 2 mangas na partilha.

A partir da análise dessas duas possíveis soluções percebemos que após cada irmão retirar sua parte à noite e dar uma manga para o cachorro, o número de mangas que deve restar será par. Seguindo este raciocínio, teremos:

- $3 \Longrightarrow 3 \cdot 3 + 1 = 10 \Longrightarrow 10 + 5 + 1 = 16 \Longrightarrow 16 + 8 + 1 = 25$. Como 25 é ímpar, eles não poderiam ter recebido 3 mangas

- $4 \Longrightarrow 3 \cdot 4 + 1 = 13$, que é ímpar, .

- $5 \Longrightarrow 3 \cdot 5 + 1 = 16 \Longrightarrow 16 + 8 + 1 = 25$, que é ímpar.

- $6 \Longrightarrow 3 \cdot 6 + 1 = 19$, que é ímpar.

- $7 \Longrightarrow 3 \cdot 7 + 1 = 22 \Longrightarrow 22 + 11 + 1 = 34 \Longrightarrow 34 + 17 + 1 = 52 \Longrightarrow 52 + 26 + 1 = 79$. Como o número ímpar só aparece após a etapa correspondente ao momento antes do irmão mais novo pegar sua parte, concluímos que o menor número de mangas comprado pelos irmãos é 79.