1) Qual é o maior, $\sqrt{20}+\sqrt{98}$ ou $\sqrt{19}+\sqrt{99}$? Justifique!

Solução: Sendo $x=\sqrt{20}+\sqrt{98}$ e $y=\sqrt{19}+\sqrt{99}$, temos $x^2=20+2\sqrt{20}\sqrt{98}+98$ e $y^2=19+2\sqrt{19}\sqrt{99}+99$, ou seja, $x^2=118+2\sqrt{1960}$ e $y^2=118+2\sqrt{1881}$. Como x e y são ambos positivos e $x^2>y^2$, temos que $x>y$. Portanto, o maior é $\sqrt{20}+\sqrt{98}$.

2) Sabendo que $cos(5x)=16cos^5x-20cos^3x+5cosx$. Calcule $cos18°$. Determine todos os valores reais positivos, x e y, que são soluções da equação:

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0.$$

Solução: Substituindo $x=18°$ na fórmula dada, obtemos $\cos(90°)=16\cos^5 18°-20\cos^3 18°+5\cos 18°$, ou seja, $16\cos^5 18°-20\cos^3 18°+5\cos 18°=0$. Fazendo $\cos 18°=y$, obtemos $16y^5-20y^3+5y=0$.

Como $y\neq 0$, dividimos a equação anterior por y e obtemos $16y^4-20y^2+5=0$ que é uma equação biquadrada em y cuja solução é $y=\pm\sqrt{\frac{20\pm\sqrt{80}}{32}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$. Como $\cos 18°>0$ e $\cos 18°>\cos 60°=\frac{1}{2}$, temos que a única possibilidade é

$$y=\cos 18°=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

A equação dada é equivalente a $x^2-4x+4+4x+4x\cos(xy)=0$, ou seja, $\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}+\underbrace{4x}_{>0}\underbrace{(\cos(xy)+1)}_{\geq 0}=0$. Obtemos assim a soma de dois números não-negativos dando igual a zero o que só é possível quando ambos são nulos, ou seja, $(x-2)^2=0$ e $4x(\cos(xy)+1)=0 \Rightarrow x=2$ e $\cos(xy)=-1$ $\Rightarrow \cos(2y)=-1 \Rightarrow 2y=\pi+2k\pi \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}+k\pi$ onde $k\in\mathbb{N}$. Portanto, as soluções positivas da equação são $x=2$ e $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{N}$.

3) Seja $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ a função definida por

$$f(n)=\begin{cases} n-3, & \text{se} \quad n\geq 1000 \\ f(f(n+5)), & \text{se} \quad n<1000. \end{cases}$$

Calcule o valor de $f(84)$.

Solução: Da definição de f, obtemos que $f(1000)=997$, $f(1001)=998$, $f(1002)=999$, $f(1003)=1000$, $f(1004)=1001$, etc.
Obtemos também que

- $f(999)=f(f(1004))=f(1001)=998$,

- $f(998) = f(f(1003)) = f(1000) = 997$,
- $f(997) = f(f(1002)) = f(999) = 998$,
- $f(996) = f(f(1001)) = f(998) = 997$,
- $f(995) = f(f(1000)) = f(997) = 998$,
- $f(994) = f(f(999)) = f(998) = 997$, etc.

Assim, aplicando-se f a um valor $n < 1000$, obtemos como resultado 998 se n for ímpar ou 997 se n for par. Deduzimos então que $f(84) = 997$.

4) Um homem tem 15878 peças triangulares para formar um mosaico. Cada triângulo é eqüilátero com um centímetro de lado. Ele construiu o mosaico como sendo o maior triângulo equilátero possível.

a) Qual é a medida do lado do mosaico?

b) Quantas peças não foram usadas?

Solução: a) Observamos que a sequência formada pelo número de triângulos em cada linha do mosaico corresponde a 1, 3, 5, ..., $2n-3$, $2n-1$, onde n representa o número de linhas do mosaico.
Repetindo a sequência de trás para frente e somando-as da seguinte forma:

$$(1+2n-1)+(3+2n-3)+...+(2n-3+3)+(2n-1+1) = \underbrace{2n + 2n + ... + 2n + 2n}_{n}.$$

Daí, note que $2S_n = 2n^2 \rightarrow S_n = n^2$, onde S_n corresponde a soma dos termos da seqüência. Assim concluímos que essa soma é um quadrado perfeito, menor que ou igual a 15878, como o homem construiu um mosaico como sendo o maior triângulo eqüilátero possível, então:

$$n^2 = 15876 \Rightarrow n = 126$$

b) Como o quadrado perfeito mais próximo de 15878 é 15876, logo restaram duas peças.

5) Sejam a, b e c três números reais positivos, dois a dois distintos, tais que

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}.$$

Mostre que $a^a b^b c^c$ é um inteiro positivo.

Solução: Seja $y = a^a b^b c^c$. Então:

$$\log y = \log(a^a) + \log(b^b) + \log(c^c) = a\log a + b\log b + c\log c \Rightarrow$$
$$\log y = a\log a + b\left(\frac{c-a}{b-c}\right)\log a + c\left(\frac{a-b}{b-c}\right)\log a \Rightarrow$$
$$\log y = \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{b-c}\cdot\log a = 0.$$

Logo, $\log y = 0$ de onde concluímos que $y = 1$ e, portanto, é um inteiro positivo.

6) Três irmãos e seu cachorro foram à feira de Oitizeiro comprar um balaio de mangas, mas decidiram comê-las no dia seguinte. À noite, o mais novo levantou-se e viu que se desse uma manga para o cachorro poderia dividir o restante em três partes iguais. Assim ele o fez, guardou a sua parte e foi dormir. Depois, o irmão mais velho acordou e percebeu que dando uma manga ao cachorro poderia dividir as que sobravam em três grupos iguais. Então ele deu uma manga para o cachorro, pegou a sua parte e foi dormir. O irmão do meio fez a mesma coisa sem que os outros dois vissem. No dia seguinte, os três acordaram, repartiram as mangas igualmente entre eles e vendo que sobrou uma, deram-na ao cachorro. Determine o menor número possível de mangas que eles compraram, sabendo que nenhuma manga foi cortada.

Solução: Utilizando-se do método por tentativas, pode-se, a partir do número de mangas recebida por cada irmão na última partilha, verificar qual o menor número que satisfaz todas as condições da situação-problema.

- Assim, partiremos do caso em que cada irmão recebesse 1 manga após a partilha. Desse modo, havia restado antes da partilha $3\cdot 1+1 = 4$ mangas, logo antes do irmão do meio pegar sua parte antes de dormir, havia restado $4+2+1 = 7$ mangas, no entanto, o irmão mais velho havia deixado mangas para serem divididas entre seus 2 irmão igualmente, sem deixar resto e sem cortar nenhuma manga, como 7 é ímpar, isso não seria possível. Assim, os irmãos não poderiam receber 1 manga cada um.
- Considerando que cada um recebeu 2 mangas após a partilha, teremos que antes desta havia $2\cdot 3+1 = 7$. Como o irmão do meio deixou mangas para serem divididas entre seus irmãos de forma igual, percebemos que o número de mangas que restaram após pegar sua parte deveria ser par, logo não poderiam ter restado 7 mangas após essa etapa. Assim, os irmãos não poderiam ter recebido 2 mangas na partilha.

A partir da análise dessas duas possíveis soluções percebemos que após cada irmão retirar sua parte à noite e dar uma manga para o cachorro, o número de mangas que deve restar será par. Seguindo esse raciocínio, teremos:

- $3 \Longrightarrow 3 \cdot 3 + 1 = 10 \Longrightarrow 10 + 5 + 1 = 16 \Longrightarrow 16 + 8 + 1 = 25$. Como 25 é ímpar, eles não poderiam ter recebido 3 mangas

- $4 \Longrightarrow 3 \cdot 4 + 1 = 13$, que é ímpar.

- $5 \Longrightarrow 3 \cdot 5 + 1 = 16 \Longrightarrow 16 + 8 + 1 = 25$, que é ímpar.

- $6 \Longrightarrow 3 \cdot 6 + 1 = 19$, que é ímpar.

- $7 \Longrightarrow 3 \cdot 7 + 1 = 22 \Longrightarrow 22 + 11 + 1 = 34 \Longrightarrow 34 + 17 + 1 = 52 \Longrightarrow 52 + 26 + 1 = 79$. Como o número ímpar só aparece após a etapa correspondente ao momento antes do irmão mais novo pegar sua parte, concluímos que o menor número de mangas comprado pelos irmãos é 79.