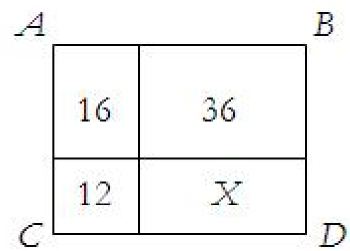
1) Considere o retângulo $ABCD$ conforme figura abaixo. Calcule o valor de X e determine o valor da área do retângulo $ABCD$.

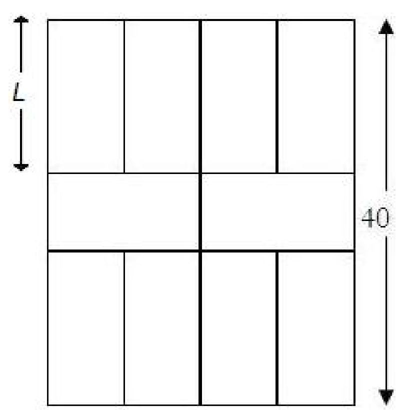


Solução: Observe que em retângulos que possuem a mesma altura, a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases. Se dois retângulos possuem a mesma base, a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas alturas. Logo

$$\frac{16}{36} = \frac{12}{X} \Rightarrow X = 27.$$

Dessa forma, a área do retângulo $ABCD$ é 91 u.a.

2) A figura abaixo é composta por dez retângulos idênticos. Qual é a área do retângulo maior?



Solução: Seja L o comprimento do lado do retângulo menor. Então temos:

$$2L + \frac{1}{2}L = 40 \Rightarrow L = 16.$$

Logo a área do retângulo maior é:

$$A = 40 \times 32 = 1280 \text{ u.a.}$$

3) Sejam a e b dois números inteiros não negativos cuja diferença de seus quadrados é 19. Determine esses números.

Solução: Temos que:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 19.$$

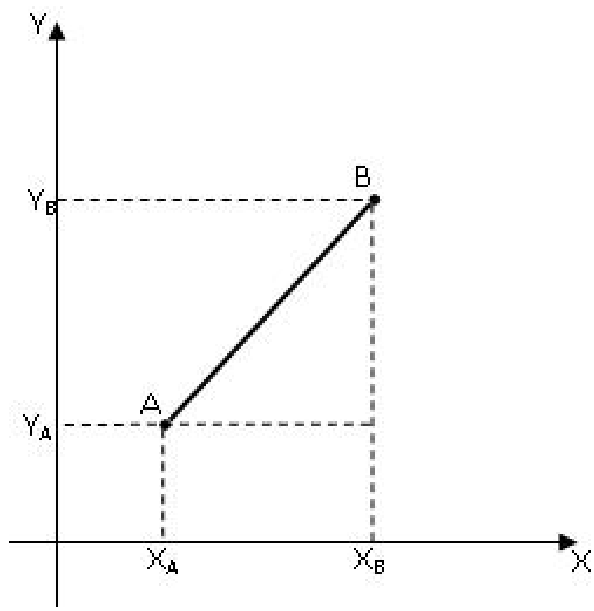
Como 19 é primo, então ele só é divisível por 19 e por 1 e já que a e b são números positivos, a soma entre eles deve ser maior que sua diferença, logo teremos:

$$a - b = 1 \text{ e } a + b = 19.$$

Assim $a = 10$ e $b = 9$.

4) Seja A e B dois pontos no plano cartesiano. Determine a fórmula da distância entre A e B.

Solução: Considerando dois pontos quaisquer $A = (X_A, Y_A)$ e $B = (X_B, Y_B)$, representados na figura:



Observamos, inicialmente, que a distância entre os pontos A e B é igual ao comprimento do segmento $\overline{AB}$, que corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos congruentes aos segmentos $\overline{X_AX_B}$ e $\overline{Y_AY_B}$, respectivamente. Assim teremos:

$$med(\overline{X_AX_B}) = X_B - X_A;$$
$$med(\overline{Y_AY_B}) = Y_B - Y_A.$$

Como o triângulo é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(med(\overline{AB}))^2 = (med(\overline{X_AX_B}))^2 + (med(\overline{Y_AY_B}))^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2.$$

Daí concluímos que:

$$med(\overline{AB}) = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}.$$

5) Seja ABC um triângulo isósceles de altura 8 cm e base 4 cm, inscrito em uma circunferência de raio R. Determine o valor de R.

Solução: De acordo com o enunciado podemos esboçar a FIGURA 1, onde AM corresponde à altura relativa à base BC e O, ao centro da circunferência. Ligando-se O aos vértices B e C formaremos um novo triângulo isósceles com base BC e altura OM (FIGURA 2).

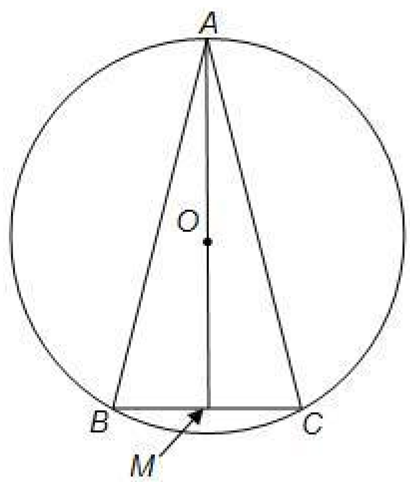


FIGURA 1

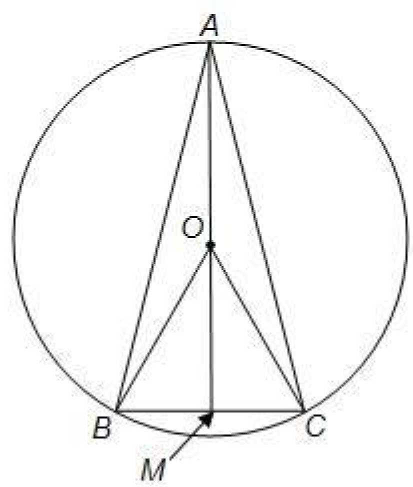


FIGURA 2

As figuras permitem visualizar que o triângulo OMB é retângulo, onde OB corresponde à hipotenusa e também ao raio da circunferência de medida R. OM é um cateto de medida X e MB é o outro cateto de medida 2 cm. Daí concluímos que:

$$R^2 = X^2 + 2^2.$$

Por outro lado, temos que $AM = AO + OM$, onde AO também é raio da circunferência. Assim temos:

$$R + X = 8.$$

Donde concluímos que:

$$R^2 = (8 - R)^2 + 2^2 \Rightarrow R = 4,25\text{cm}.$$

6) Dado um ponto qualquer no interior de um triângulo eqüilátero, mostre que o comprimento da altura é igual à soma dos comprimentos das perpendiculares baixadas deste ponto até os lados do triângulo.
Solução:

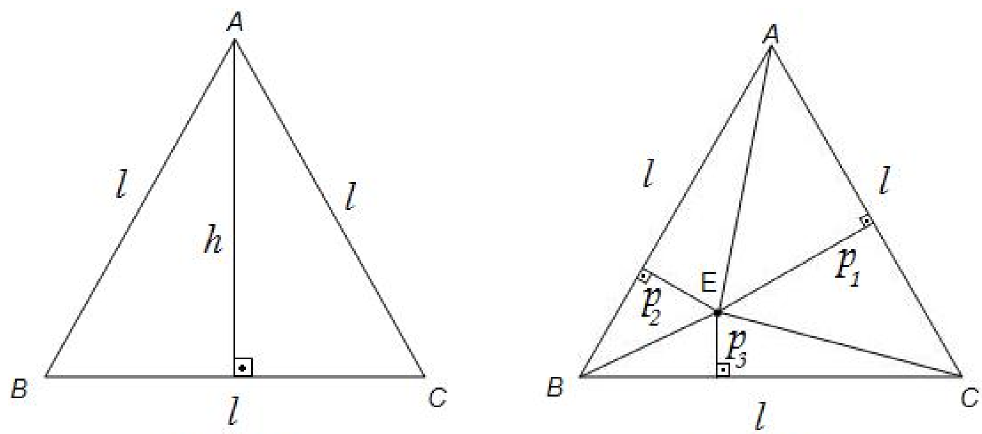


FIGURA 1 FIGURA 2

Tomemos um triângulo eqüilátero qualquer ABC de lado l e altura h (FIGURA 1), sua área $A_{\triangle} = \dfrac{lh}{2}$.

Quando a partir de um ponto E qualquer do seu interior traçamos perpendiculares p_1, p_2 e p_3 a cada um de seus lados e também ligamos esse ponto é a cada um dos vértices (FIGURA 2), obtemos três triângulos EAC, EAB e EBC de áreas iguais a $A_1 = \dfrac{lp_1}{2}$, $A_2 = \dfrac{lp_2}{2}$ e $A_3 = \dfrac{lp_3}{2}$, respectivamente. Daí teremos:

$$A_{\triangle} = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow \frac{lh}{2} = \frac{lp_1}{2} + \frac{lp_2}{2} + \frac{lp_3}{2} \Rightarrow h = p_1 + p_2 + p_3.$$