(1) a) Sejam x, y dois números reais estritamente positivos. Mostre que

$$x^x y^y \geq x^y y^x$$

b) Sejam a, b, c números reais estritamente positivos. Mostre que

$$a^a \times b^b \times c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

(2) a) Dê exemplo de uma progressão aritmética que tenha $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ como dois de seus termos

b) Mostre que não existe uma progressão aritmética que tenha $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ como três de seus termos (não necessariamente consecutivos).

(3) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e considere uma função $f : A \longrightarrow A$ definida pela seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	5	2	1	3

Por exemplo, $f(1) = 4$ e $f(5) = 3$. Calcule

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{\text{2007 vezes}}(2).$$

(4) Em uma campanha política, um candidato A mandou imprimir 5400 panfletos e um candidato B, 8820 panfletos. A gráfica que os imprimiu quer distribuí-los em pacotes, obedecendo às seguintes condições:

- os panfletos dos candidatos A e B não devem ser misturados em um mesmo pacote;
- todos os pacotes devem ter as mesmas quantidades de panfletos;
- a quantidade de pacotes deve ser a menor possível.

Dessa forma, quantos planfletos devem ser colocados em cada pacote?

(5) a) Seja θ um ângulo agudo tal que $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{5}$ (ou seja, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$). Lembrando que

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg}(a) \pm \operatorname{tg}(b)}{1 \mp \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)},$$

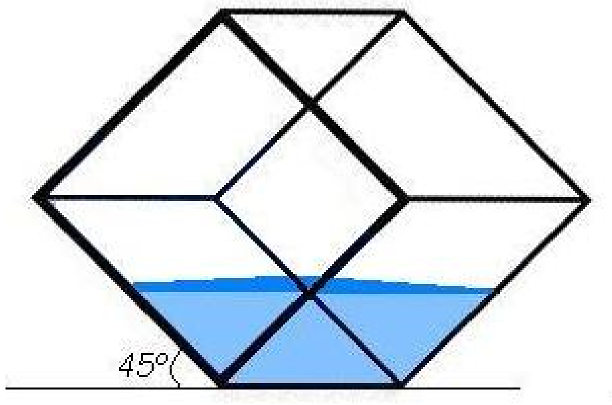
calcule $\operatorname{tg}(2\theta)$, $\operatorname{tg}(4\theta)$ e $\operatorname{tg}(4\theta - \frac{\pi}{4})$.

b) Mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Esta fórmula foi utilizada em 1706 para calcular pela primeira vez o valor de π com 100 casas decimais.

(6) Uma caixa em forma de cubo de aresta 10 cm, fabricada com material de espessura desprezível, encontra-se em repouso sobre um plano, com água até uma certa altura h. Girando-se essa caixa de 45°em torno de uma de suas arestas sobre o plano (veja figura a seguir)



a superfície da água passa por exatamente 4 pontos médios de outras arestas do cubo. Com base nessas informações, calcule a altura inicial h da água contida na caixa.