OPM 2007 - NÍVEL 3 - SOLUÇÕES

(1) a) Se $x = y$ então $x^x y^y = x^y y^x$. Suponhamos $x > y$. Então $n = x - y > 0$ e daí $x^n > y^n$, ou seja, $x^{x-y} > y^{x-y} \Rightarrow \frac{x^x}{x^y} > \frac{y^x}{y^y} \Rightarrow x^x y^y > x^y y^x$. Se $x < y$ obtemos a mesma desigualdade. Assim, em geral, temos $x^x y^y \geq x^y y^x$.

b) Usando a desigualdade do item anterior com os pares (a, b), (a, c) e (b, c) temos: $a^a b^b \geq a^b b^a$, $a^a c^c \geq a^c c^a$ e $b^b c^c \geq b^c c^b \Rightarrow (a^a)^2 (b^b)^2 (c^c)^2 \geq a^b b^a a^c c^a b^c c^b = a^{b+c} b^{a+c} c^{a+b}$. Multiplicando os dois membros por $a^a b^b c^c$, obtemos

$$(a^a)^3 (b^b)^3 (c^c)^3 \geq a^{a+b+c} b^{a+b+c} c^{a+b+c} \Rightarrow a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

(2) a) Seja $r = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Um exemplo de progressão aritmética é

$$(\sqrt{3},\ \sqrt{3} + r,\ \sqrt{3} + 2r,\ \sqrt{3} + 3r,\ \sqrt{3} + 4r,\ \ldots)$$

ou seja,

$$(\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ 2\sqrt{5} - \sqrt{3},\ 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3},\ 4\sqrt{5} - 3\sqrt{3},\ \ldots).$$

b) Suponhamos que possa existir um progressão aritmética com primeiro termo a_1 e razão $r \neq 0$ com termos $a_m = \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{5}$ e $a_p = \sqrt{7}$. Então $a_1 + (m-1)r = \sqrt{3}$, $a_1 + (n-1)r = \sqrt{5}$, $a_1 + (p-1)r = \sqrt{7}$. Subtraindo a primeira da segunda e a segunda da terceira equações, obtemos $(m-1)r - (n-1)r = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ e $(n-1)r - (p-1)r = \sqrt{5} - \sqrt{7}$. Dividindo-se essas duas últimas equações, obtemos $\frac{m-n}{n-p} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$, o que é absurdo pois o primeiro membro é racional e o segundo é irracional.

(*Para verificar que* $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{15}-5}{5-\sqrt{35}}$ *é irracional, podemos elevar ao quadrado duas vezes e obter que* x *é raiz da equação* $x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 10x + 1 = 0$ *e que essa equação não possui raízes racionais.*)

(3) Temos $f(2) = 5$, $(f \circ f)(2) = f(5) = 3$, $(f \circ f \circ f)(2) = f(3) = 2$, $(f \circ f \circ f \circ f)(2) = f(2) = 5$, $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(2) = f(5) = 3$, $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f) = f(3) = 2$, etc. Observamos dessa forma que a cada grupo de três composições de f consigo mesma, aplicado no ponto 2, obtemos 2 como resposta. Como 2007 é divisível por 3, obtemos que $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{\text{2007 vezes}}(2) = 2$.

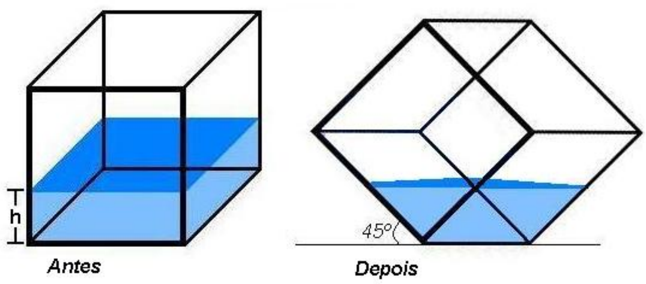
(4) A quantidade n de panfletos em um pacote deve ser divisor de 5400 e também de 8820, ou seja, n é divisor comum de 5400 e de 8820. Quanto maior o valor de n, menor será a quantidade total de pacotes. Logo, n deve ter um valor máximo, isto é,

$$n = \text{mdc}(8820, 5400) = \text{mdc}(2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2,\ 2^3 \times 3^3 \times 5^2) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

(5) a) $\text{tg}(2\theta) = \frac{2\,\text{tg}\,\theta}{1-(\text{tg}\,\theta)^2} = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{5}{12}$, $\text{tg}(4\theta) = \frac{2\,\text{tg}(2\theta)}{1-(\text{tg}(2\theta))^2} = \frac{10/12}{1-25/144} = \frac{120}{119}$, $\text{tg}(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\text{tg}(4\theta)-\text{tg}(\frac{\pi}{4})}{1+\text{tg}(4\theta)\,\text{tg}(\frac{\pi}{4})} = \frac{120/119-1}{1+120/119} = \frac{1}{239}$.

b) Como $\text{tg}(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$, temos que $4\theta - \frac{\pi}{4} = \text{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 4\theta - \text{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$ $\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 4\,\text{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$.

(6)



Ao ser girado, a água passa a definir um prisma triangular de altura 10 cm e cuja base é um triângulo retângulo isósceles de catetos medindo 5 cm. Como a área da base do prisma é $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$, temos que seu volume é $\frac{25}{2} \times 10 = 125$. Antes de ser girado, a água definia um paralelepípedo de base quadrada de área 100 e altura h; logo, o volume da água era $100h$. Portanto, $100h = 125$ e daí temos $h = 1,25\ cm$.