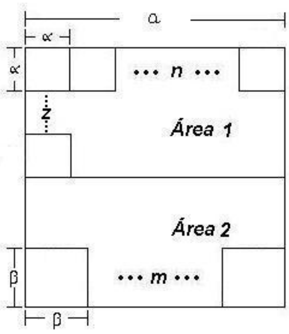
OPM 2007 - NÍVEL 2 - SOLUÇÕES

(1) Considere a Figura abaixo:



Daí, temos que:

a é a medida do lado do painel;
α é a medida do lado dos quadrados menores que formam a área 1;
n é a quantidade destes quadrados alinhados horizontalmente na área 1;
z é a quantidade destes quadrados alinhados verticalmente na área 1;
β é a medida do lado dos quadrados menores que formam na área 2;
m é a quantidade destes quadrados alinhados horizontalmente na área 2.

Note que $a = n\alpha$ e $\frac{a}{2} = z\alpha$, então:

$$n\alpha = 2z\alpha \Rightarrow \text{n} = \text{2z}.$$

Daí temos que n é um número par e $z = \frac{n}{2}$.

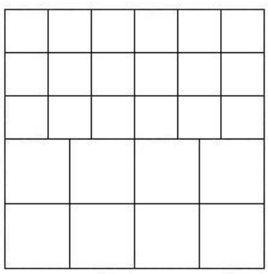
Sendo x número de quadrados que formam a área 1, então $x = nz \Rightarrow x = 2zz = 2z^2$, ou seja, o número de quadrados para formar a metade do painel terá que ser o dobro de um quadrado perfeito.

Neste caso, temos que quadrados de área $256cm^2$ e $576cm^2$ têm lados medindo α= 16cm e β= 24cm respectivamente.

Seja a a medida do lado do painel, devemos ter $a = 16n$ e $a = 24m$, ou seja, a é um múltiplo de 16 e a é um múltiplo de 24.

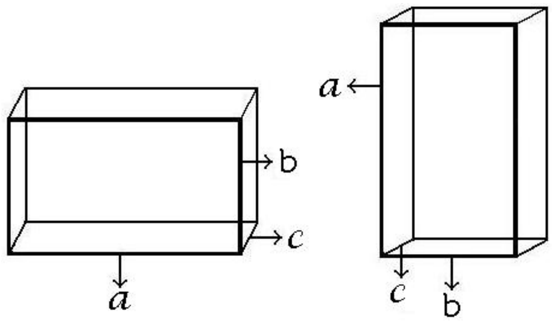
Escolhendo $b = mmc(16, 24) = 96$, observe que $a = kb \Rightarrow a = k96$, daí:

$a^2 = k^2 9216cm^2$, mas como $a^2 < 10000cm^2 = 1m^2$, então $k = 1$, Portanto a área do quadrado será $9216cm^2$ substituindo em $a = 16n$ e $a = 24m$ teremos $n = 6$ e $m = 4$. Logo o painel será:



(2) Temos que $V = 945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, onde V é o volume do paralelepípedo regular em questão.

Queremos determinar quantos paralelepípedos regulares de volume V podem ser construidos. Sejam a, b e c os comprimentos das arestas do paralelepípedo regular dado. Note que, a, b e c determinam um único paralelepípedo, como pode ser visualizado na seguinte figura.



Assim daqui em diante vamos procurar soluções tais que $a \leq b \leq c$. E temos os seguintes três casos para analizar:

- $\boxed{a = b = c}$.
  Como $V = a^3$, todos os números primos encontrados na fatoração do valor do volume V estariam elevados ao cubo, mas como $V = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, não temos nenhuma solução para este caso.

- $\boxed{1 < a = b < c \text{ ou } 1 < a < b = c}$

  1. Se $a = b < c \Rightarrow a^2c = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

     Aqui temos uma única solução:

a	b	c
3	3	$3 \cdot 5 \cdot 7$

  2. Suponha que $a < b = c$
     $$\begin{aligned} &\Rightarrow ab^2 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &\Rightarrow ab^2 = (3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 3^2 \\ &\Rightarrow a = (3 \cdot 5 \cdot 7) \text{ e } b = c = 3. \end{aligned}$$

     Não é solução, pois $a > b$.

- $\boxed{1 < a < b < c}$
  Agora vamos procurar soluções tais que:

  $$(1)\ \ 1 < a < b < c \qquad \textbf{e} \qquad (2)\ \ a \cdot b \cdot c = 3^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

  Segue-se da condição (2) que a é um divisor de $V = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. Assim temos as seguintes possibilidades para a :

  1. $a = 1$, não podemos considerar por causa da condição (1).

2. Se $a = 3 \quad \Rightarrow \quad b \cdot c = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{e} \quad 3 < b < c$, daí temos que b é um divisor de $3^2 \cdot 5 \cdot 7$ então teremos as seguintes possibilidades para b :

   $b = 1$, não consideraremos por causa da condição (1).
   $b = 3 = a$, não podemos considerar, pois $1 < a < b$.
   $b = 3^3 \Rightarrow c = 5 \cdot 7$.
   $b = 5 \Rightarrow c = 3^2 \cdot 7$.
   $b = 3 \cdot 5 \Rightarrow c = 3 \cdot 7$.
   $b = 3^3 \cdot 5 > c = 7$, não podemos considerar, pois $1 < a < b < c$.
   $b = 7 \Rightarrow c = 3^2 \cdot 5$.
   E quando $b = 3 \cdot 7 > c = 3 \cdot 5$, ou $b = 3^2 \cdot 7 > c = 5$, ou $b = 5 \cdot 7 > c = 3^2$, ou $b = 3 \cdot 5 \cdot 7 > c = 3$ ou $b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 > c = 1$, descartaremos todos, pois $1 < a < b < c$.

   Assim, as possíveis soluções encontradas quando $a = 3$ e $3 < b < c$ são:

a	b	c
3	3^3	$5 \cdot 7$
3	5	$3^2 \cdot 7$
3	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 7$
3	7	$3^2 \cdot 5$

3. Se $a = 3^2$, $bc = 3 \cdot 5 \cdot 7$, com esta condição qualquer valor que b ou c assumir contraria $3^2 = a < b < c$, exemplo $b = 3 \cdot 5 > c = 7$ ou $b = 7 < a = 9$, então $a = 3^2$ não podemos considerar.

4. Se $a = 3^3$, $bc = 5 \cdot 7$, daí se $b = 5$ ou $b = 7$, não pode ser, pois $b > a$, se $b = 5 \cdot 7 \Rightarrow c = 1$, o que contradiz $1 < a < b < c$, Logo a possibilidade de $a = 3^3$ será descartada.

5. Se $a = 5 \quad \Rightarrow \quad \text{bc} = 3^3 \cdot 7 \quad \text{e} \quad 5 < b < c$, daí temos que b é um divisor de $3^3 \cdot 7$ então teremos as seguintes possibilidades para b :

   $b = 1$, não consideraremos, pois $1 < a < b$.
   $b = 3$, descartamos, pois $1 < a = 5 < b$.
   $b = 3^2 \Rightarrow c = 3 \cdot 7$.
   $b = 3^3 > c = 7$, descartamos, pois $b < c$.
   $b = 7 \Rightarrow c = 3^3$.
   E se $b = 3 \cdot 7 > c = 3^2$, ou $b = 3^2 \cdot 7 > c = 3$, ou $b = 3^3 \cdot 7 > c = 1$, descartaremos todos, pois $1 < a < b < c$.

   Assim, as possíveis soluções para $a = 5$ e $5 < b < c$ serão:

a	b	c
5	3^2	$3 \cdot 7$
5	7	3^3

6. Se $a = 3 \cdot 5$ então $bc = 3^2 \cdot 7$, e com essa condição, qualquer que seja o valor de b ou c contradiz que $a = 3 \cdot 5 < b < c$, assim descartaremos a possibilidade de $a = 3 \cdot 5$. Note também que se $a = 3^2 \cdot 5$, ou $a = 3^3 \cdot 5$ por motivos semelhantes (contradiz $1 < a < b < c$), desconsideraremos eles também.

7. Se $a = 7 \Rightarrow bc = 3^3 \cdot 5$ e $7 < b < c$, logo b é um divisor de $3^3 \cdot 5$ então teremos as seguintes possibilidades para b:

   $b = 1$, ou $b = 3$ desconsideramos, pois $1 < a < b$.
   $b = 3^2 \Rightarrow c = 3 \cdot 5$.
   E se $b = 3^3 > c = 5$, ou $b = 5 < a = 7$, ou $b = 3 \cdot 5 > c = 9$, ou $b = 3^2 \cdot 5 > c = 3$, ou $b = 3^3 \cdot 5 > c = 1$ descartaremos todos, pois $1 < a < b < c$.

   Assim, a única possibilidade para $a = 7$ e $7 < b < c$ é:

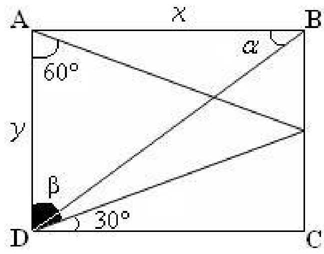
a	b	c
7	3^2	$3 \cdot 5$

8. Se $a = 3 \cdot 7$ então $bc = 3^2 \cdot 5$, e com essa condição, qualquer que seja o valor de b ou c contradiz que $a = 3 \cdot 7 < b < c$, assim descartaremos a possibilidade de $a = 3 \cdot 7$. Note também que se $a = 3^2 \cdot 7$, ou $a = 3^3 \cdot 7$, ou $a = 5 \cdot 7$, ou $a = 3 \cdot 5 \cdot 7$, ou $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, ou $a = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ por motivos parecidos (contradiz $1 < a < b < c$) desconsideraremos eles também.

   Portanto, são oito as possibilidades de blocos com o mesmo volume V:

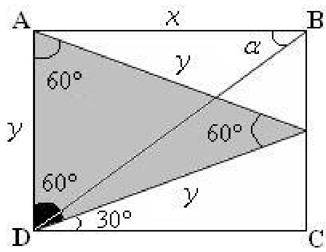
a	b	c
3	3	$3 \cdot 5 \cdot 7$
3	5	$3^2 \cdot 7$
3	7	$3^2 \cdot 5$
3	3^2	$5 \cdot 7$
3	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 7$
5	7	3^3
5	3^2	$3 \cdot 7$
7	3^2	$3 \cdot 5$

(3) De acordo com a figura abaixo:

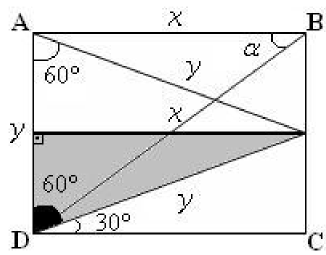


Temos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pois a hipotenusa, pelo teorema de Pitágoras, é raiz quadrada da soma dos quadrados dos catetos.

Como se trata de um retângulo $\beta = 90^o - 30^o = 60^o$ e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, logo o triângulo em destaque na figura abaixo terá todos os ângulos internos iguais a 60^o. Daí o triângulo é *equilátero.*



Considerando que a altura do triângulo equilátero é igual a x, temos que:



Assim, considerando este novo triângulo retângulo teremos:

$$\operatorname{sen}60^o = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}x.$$

Substituindo o y encontrado, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

(4) a) Como na primeira parada Manuel só possuia um litro de combustível no tanque, então precisou abastecer 55 litros de combustível, pois o tanque do seu carro tem capacidade para 56 litros:

$$56 - 1 = 55.$$

Fazendo a mesma operação, ou seja, se um tanque tem a capacidade X, subtraindo a quantidade ainda existente no tanque Y, encontraremos a quantidade de combustível que foi colocada no tanque Z,

$$X - Y = Z \quad ,$$

podemos encontrar a seguinte tabela:

1º Parada	2º Parada	3º Parada	4º Parada	5º Parada	Total
55	52	49	45	41	242

Onde o **total** é a soma de todos os litros de combustivel abastecidos por Manuel.

E como cada litro de combustível vale R$ 1,55, temos que:

$$\frac{1}{1{,}55} = \frac{242}{x} \Rightarrow x = 242 \cdot 1,55 \rightarrow x = 375,10.$$

Onde x é o valor do combustível que queremos saber.

Portanto, Manuel gastou R$ 375,10.

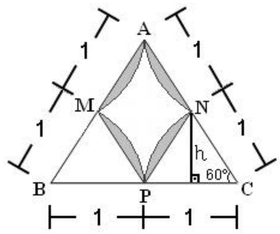
b) Com 1 *litro* de combustível o carro de Manuel percorre $6,5Km$ e sabemos que o carro de Manuel consumiu um total de 242*litros* de combustível, então:

$$\frac{1}{6{,}5} = \frac{242}{y} \Rightarrow y = 242 \cdot 6,5 \rightarrow y = 1573.$$

Onde y é quanto o carro percorreu com o total do combustível dado.

Portanto Manuel percorreu 1573 *quilômentros.*

(5)Considere a figura:

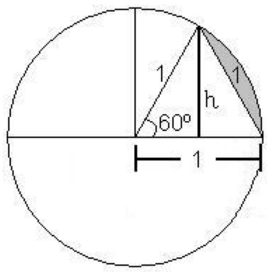


$AM = MB = BP = PC = CN = NA = 1cm$, pois M, P, N são pontos médios do triângulo ABC.

E em um triângulo equilátero seus ângulos internos medem 60º. Então h, a altura do triângulo interno, será:

$$\operatorname{sen} 60^{\circ} = \frac{h}{1} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

Agora observe a seguinte figura:



Note que a área que desejamos A_T será:

$$A_T = 4 \cdot (A_{setor} - A_{\Delta}).$$

Onde A_{setor} é a área do setor circular e A_{Δ} é a área do triângulo de altura h.

A área do setor circular A_{setor} será:

$A_{setor} = \frac{\theta}{2} \cdot r^2 = \frac{60}{2} \cdot 1^2 = 30\text{cm}^2,$

no nosso caso o ângulo $\theta = 60^{\text{o}}$ e o raio $r = 1\text{cm}.$

A área do triângulo A_{Δ}:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2.$$

Assim temos que A_T, será:

$$A_T = 4 \cdot (A_{setor} - A_{\Delta}) = 4 \cdot (30 - \tfrac{\sqrt{3}}{4}) \rightarrow A_T = 120 - \sqrt{3}\text{cm}^2.$$

(6) Lembre que um número x é dito par se o resto da sua divisão por dois for zero:

$$\begin{array}{l|l} x & 2 \\ \hline (0) & k \end{array} \Longrightarrow x = 2k + 0 \Longrightarrow x = 2k$$

E um número y é dito ímpar se o resto da sua divisão por dois for um:

$$\begin{array}{l|l} y & 2 \\ \hline (1) & s \end{array} \Longrightarrow y = 2s + 1$$

Logo, temos uma representação para os números ímpares, então sendo $n = 2r + 1$, temos:

$$n^2 - 1 = (2r + 1)^2 - 1 = 4r^2 + 4r + 1 - 1 = 4(r^2 + r) \Rightarrow \text{n}^2 - 1 = 4M.$$

Onde $M = r^2 + r$.

Portanto $n^2 - 1$ é um múltiplo de 4.