

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**OLIMPIÁDA PESSOENSE DE MATEMÁTICA**  
**NÍVEL 3 – ENSINO MÉDIO**

1. Um par ordenado  $(1, 90)$  é chamado *par centenário* porque  $91 + 9 + 0 = 90 + 9 + 1 = 100$ . Determine todos os pares centenários.

2. Mostre que a função definida por  $f(n) = n^2 + 3n$  é divisível por 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

3. Demonstrar que:

“Se a soma dos  $n$  primeiros termos de uma seqüência é da forma  $an^2 + bn^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então esta seqüência é uma P.A.”

4. Mostre, sem desenvolver, que

$$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \sin^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \sin^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \sin^2 c \end{vmatrix} = 0$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5. Dada a equação  $x^2 - px + q^m = 0$ , mostre que

$$\log_q a^a + \log_q b^b + \log_q a^b + \log_q b^a = mp$$

onde  $a$  e  $b$  são as raízes da equação dada.