GABARITO DA PROVA

1) Observando as duas últimas informações, concluímos que choveu 2 dias a mais pela manhã do que à tarde. Como houve um total de 8 dias de chuva, a única possibilidade é haver 5 manhãs chuvosas e 3 tardes chuvosas.

Os eventos "*chover pela manhã*" e "*chover à tarde*" são mutuamente exclusivos, isso significa que houve durante esse período de dias de chuva, 5 tardes sem chuva e 3 manhãs sem chuva.

Como, no total, houve 8 tardes sem chuva, concluímos que houve $8 - 5 = 3$ dias sem chuva. Assim, $n =$número de dias chuvosos mais número de dias sem chuva $= 8 + 3$, ou seja, $n = 11$.

2) A população em cada ano é igual a $1 + 0,1 = 1,1$ vezes a população do ano anterior. Dessa forma, a população daqui a x anos será igual a $f(x) = 25000 \cdot (1,1)^x$.

Para obtermos $f(x) = 100000$, devemos ter $25000 \cdot 1,1^x = 100000$, ou seja, $1,1^x = 4$. Aplicando logaritmos, obtemos: $x \log 1,1 = \log 4$ de onde finalmente concluímos que $x = \dfrac{\log 4}{\log 1,1}$.

OBS.: um valor aproximado para x é $14,54$.

3) A expressão dada é equivalente a $(x+y)^2 = xy$, ou seja, $x^2+xy+y^2 = 0$. Considerando como um polinômio do 2^o grau na variável x, temos $\Delta = y^2 - 4y^2 = -3y^2 < 0$. Logo, a equação dada não pode ter raízes reais.

Outra solução é através do completamento de quadrados. A expressão dada é equivalente a $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$ o que é absurdo pois a soma de quadrados do primeiro membro é sempre positiva (porque $y \neq 0$).

4) Sejam a o comprimento do lado do triângulo ABC e S a sua área. A soma das áreas dos triângulos APB, BPC e CPA deve ser igual a S, ou seja, $\frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = S$. Concluímos, então, que $x + y + z = 2S/a$ e que a posição do ponto P não influencia no valor dessa soma.

5) Na primeira coluna, aparecem apenas quadrados perfeitos. Além disso, a n-ésima linha inicia com n^2. Assim, para localizar a posição de algum número, é fundamental saber qual o quadrado perfeito mais próximo desse número.

Como $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$, temos que 2005 está na 45^a linha ou na 45^a coluna.

Como $2025 - 2005 = 20$, podemos concluir que 2005 está na 45^a linha e 21^a coluna da tabela.

6) Fazendo $x = 0$ na expressão dada, obtemos $f(0) - (f(0))^2 \geq \frac{1}{4}$ que é equivalente a $4(f(0))^2 - 4f(0) + 1 \leq 0$, ou seja, $(2f(0) - 1)^2 \leq 0$. Concluímos então que $2f(0) - 1 = 0$ e, portanto, $f(0) = 1/2$.

Analogamente, fazendo $x = 1$, obtemos $f(1) - (f(1))^2 \geq \frac{1}{4}$, ou seja, $(2f(1) - 1)^2 \leq 0$. Do mesmo modo concluímos que $f(1) = 1/2$.

Como $f(0) = f(1)$ temos que a função f não pode ser injetora.