GABARITO DA PROVA

1. (Valor 10 pontos)

Sejam c o número de carrinhos de mão e s o número de sacos a serem carregados. Então temos:

$$\begin{cases} s = 2c + 13 \\ s = 3(x-3) = 3x - 9 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações obteremos $c = 22$ *carrinhos* e $s = 57$ *sacos*.

Obs.: O aluno que armar o sistema terá 5 pontos. Resolvendo o sistema terá mais 5 pontos.

2. Valor 10 pontos

Consideremos o triângulo AMD. Usando o Teorema de Pitágoras poderemos determinar a sua hipotenusa, ou seja,

$$(DM)^2 = 10^2 + 5^2 \quad \Rightarrow \quad DM = 5\sqrt{5}$$

Observe que os triângulos DNE e DAN são semelhantes. Assim temos:

$$\frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{DE}{10} = \frac{EN}{5}$$

Daí, teremos $DE = 2\sqrt{5}$ e $EN = \sqrt{5}$. Portanto a área do triângulo NED é:

$$\text{Área do } \Delta DNE = \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5 \text{ unidades de medida ao quadrado.}$$

Obs.: O aluno que determinar o valor de DM ganhará 2 pontos. Escrevendo a proporcionalidade a partir da semelhança dos triângulos, ganhará mais 2 pontos. Encontrando a área do triângulo DNE ganhará mais 6 pontos.

3. Valor 10 pontos

Observe que

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad (1)$$

Assim temos:

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2}; \quad f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad f(3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \ldots, \quad f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad (2)$$

Logo,

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{100387}{100388} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{100387}{100388} \Rightarrow \frac{1}{n+1} = \frac{1}{100388} \Rightarrow n = 100387$$

O aluno que escrever a expressão (1) terá 3 pontos. Escrevendo a expressão (2) terá mais 3 pontos. Se concluir o problema terá mais 4 pontos.

4. a) Suponha que existam inteiros positivos m e n tais que

$$530 = 17m + 19n \;\Rightarrow\; 530 = 17(m+n) + 2n \;\Rightarrow\; m+n = \frac{530-2n}{17} = 2\,\frac{265-n}{17}.$$

Logo $m + n$ é múltiplo de 2, isto é, existe um inteiro k tal que $m+n = 2k$. Donde se pode concluir que $28 \le m+n \le 30$, pois $530 = 510 + 20 = 30 \times 17 + 20$, $510 - 17 = 493$ e $493 - 17 = 476 = 17 \times 28$. Portanto

$$476 \le 17(m+n) \le 510$$

Daí,

$$530 - 2n = 510 \Rightarrow n = 10 \quad \text{ou} \quad 530 - 2n = 476 \Rightarrow n = 27$$

Donde

$$m+n = 30 \Rightarrow m = 20 \quad \text{ou} \quad m+n = 28 \Rightarrow m = 1$$

Portanto,

$$530 = 17 \times 20 + 19 \times 10 \quad \text{ou} \quad 530 = 17 \times 1 + 19 \times 27.$$

b) Não seria possível escrever (*) $530 = 24m + 32n$, com m e n inteiros positivos, pois

$$530 = 8(3m + 4n)$$

E como 530 não é divisível por 8 não existem números m e n inteiros positivos satisfazendo (*).

Obs.: O aluno que resolver a parte a) ganhará 6 pontos. A parte b) vale 4 pontos.

5. a) Temos n palitos na parte de cima e também na parte de baixo. Logo teremos $2n$ palitos acrescidos dos dois palitos, um do lado esquerdo e o outro do lado direito, perfazendo o total de $2n + 2$ palitos.

Obs.: O aluno ao fazer esta contagem ganhará 3 pontos.

b) Na parte interna teremos $n - 1$ palitos.

Obs.: O aluno que concluir este item terá mais 3 pontos.

c) O total de palitos usados é igual a: $2n + 2 + n - 1 = 3n + 1$ palitos.

Obs.: O aluno que concluir o problema terá mais 4 pontos.

6. Valor 10 pontos

Inicialmente observe que se na reta r tivéssemos M pontos e na reta s tivéssemos N pontos então a quantidade de triângulos que poderíamos obter, fixada a reta r, seria $(M - 1) . N$. Da mesma forma, se fixarmos a reta s, teríamos que a quantidade de triângulos è: $(N - 1) . M$. Logo o número total de triângulos é: $(M - 1) . N + (N - 1) . M$.

Portanto teremos que o número de triângulos obtidos com 35 pontos na reta r e 42 na reta s, será:

$$(35 - 1) . 42 + (42 - 1) . 35 = 34 . 42 + 41 . 35 = 2.863 \text{ triângulos.}$$

Obs.: O aluno que notar a primeira parte ganhará 5 pontos. Com a conclusão do problema, ganhará mais 5 pontos.